

# فیزیک الکتریسته

برای رشته‌های: مهندسی کامپیوتر، مهندسی فناوری اطلاعات،  
برق، مکانیک، عمران، صنایع، ICT و علوم کامپیوتر

تالیف: علی اکبر مسلم زاده ولوکلایی

## برخی از عناوین مهم

- بردارها و بارالکتریکی
- میدان الکتریکی و فارمیت و خازن‌ها
- جریان و مقاومت الکتریکی
- نیروی محرک و مدار الکتریکی
- میدان مغناطیسی و قانون آمپر
- القای الکترومغناطیسی و القابیدگی
- خواص مغناطیس

---

---

# فیزیک الکتریسته

---

---

**تالیف:**

علی اکبر مسلم زاده ولوکلائی



فن آوری نوین

---

---

سرشناسه:	مسلم زاده ولوکلای، علی اکبر، ۱۳۵۳
عنوان و نام پدیدآور:	فیزیک الکتريسته / تالیف علی اکبر مسلم زاده ولوکلای
مشخصات نشر:	بابل: فن آوری نوین، ۱۳۹۲
مشخصات ظاهری:	۲۱۶ص: مصور، جدول
شابک:	۱۲۵۰۰۰ ریال: ۵-۱-۹۲۲۵۴-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی:	فیا
یادداشت:	کتابنامه: ص: ۲۱۶
موضوع:	الکترومغناطیس - - راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع:	الکترومغناطیس - - مسائل، تمرین ها و غیره (عالی)
رده بندی کنگره:	۱۳۹۲ م/۷۶۰QC
رده بندی دیویی:	۵۳۷/۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی:	۳۳۶۴۷۷۴



فن آوری نوین

[www.fanavarienovin.net](http://www.fanavarienovin.net)

بابل، کد پستی ۷۳۴۴۸-۴۷۱۶۷

تلفن: ۲۲۵۶۶۸۷-۰۱۱۱

## فیزیک الکتريسته

تألیف: علی اکبر مسلم زاده ولوکلای

نوبت چاپ: چاپ اول

سال چاپ: پاییز ۱۳۹۲

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

قیمت: ۱۲۵۰۰ تومان

نام چاپخانه و صحافی: فرنگار رنگ

شابک: ۵-۱-۹۲۲۵۴-۶۰۰-۹۷۸

ویراستار:

نشانی ناشر: بابل، چهارراه نواب، کاظم بیگی، جنب حسینیه منصور کاظم بیگی، طبقه همکف

طراح جلد: کانون آگهی و تبلیغات آبان (احمد فرجی)

تهران، خ اردیبهشت، نش و حید نظری، پلاک ۱۴۲ تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰-۶۶۴۰۱۴۴

## فهرست مطالب

<p>۷-۳. مسائل تکمیلی..... ۵۰</p> <p><b>فصل چهارم: قانون گاوس..... ۵۱</b></p> <p>۱-۴. معرفی شار و مفهوم شار الکتریکی..... ۵۱</p> <p>۲-۴. قانون گاوس..... ۵۴</p> <p>۳-۴. برخی کاربردهای قانون گاوس..... ۵۶</p> <p>۱-۳-۴. توزیع بار در اجسام رسانا..... ۵۶</p> <p>۲-۳-۴. توزیع بار با تقارن کروی..... ۵۶</p> <p>۳-۳-۴. خط نامتناهی بار..... ۵۷</p> <p>۴-۴. نمونه مسائل حل شده..... ۵۸</p> <p>۵-۴. مسائل تکمیلی..... ۶۲</p> <p><b>فصل پنجم: پتانسیل الکتریکی..... ۶۴</b></p> <p>۱-۵. پتانسیل الکتریکی..... ۶۴</p> <p>۲-۵. پتانسیل و میدان الکتریکی..... ۶۶</p> <p>۳-۵. پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای..... ۶۹</p> <p>۴-۵. پتانسیل حاصل از چند بار نقطه‌ای..... ۷۰</p> <p>۵-۵. محاسبه میدان الکتریکی از روی پتانسیل..... ۷۳</p> <p>۶-۵. انرژی پتانسیل الکتریکی..... ۷۴</p> <p>۷-۵. نمونه مسائل حل شده..... ۷۵</p> <p>۸-۵. مسائل تکمیلی..... ۸۰</p> <p><b>فصل ششم: ظرفیت و خازن‌ها..... ۸۲</b></p> <p>۱-۶. خازن..... ۸۲</p> <p>۲-۶. ظرفیت خازن..... ۸۳</p> <p>۱-۲-۶. ظرفیت خازن تخت..... ۸۴</p> <p>۲-۲-۶. ظرفیت خازن استوانه‌ای..... ۸۶</p> <p>۳-۲-۶. ظرفیت خازن‌های کروی..... ۸۷</p> <p>۳-۶. به هم بستن خازن‌ها..... ۸۹</p> <p>۱-۳-۶. به هم بستن خازن‌ها به طور متوالی..... ۸۹</p> <p>۲-۳-۶. به هم بستن خازن‌ها را به طور موازی..... ۹۱</p> <p>۴-۶. انباشت انرژی در خازن..... ۹۳</p> <p>۵-۶. خازن تخت با دی الکتریک..... ۹۵</p> <p>۶-۶. نمونه مسائل حل شده..... ۹۸</p> <p>۷-۶. مسائل تکمیلی..... ۱۰۴</p>	<p><b>فصل اول: بردار..... ۹</b></p> <p>۱-۱. نمایش بردار..... ۹</p> <p>۲-۱. قوانین جمع بردارها..... ۱۰</p> <p>۳-۱. تألیف ( تجزیه ) یک بردار..... ۱۱</p> <p>۴-۱. جمع بردارها از طریق مؤلفه‌ها..... ۱۴</p> <p>۵-۱. محاسبه اندازه مجموع دو بردار..... ۱۵</p> <p>۶-۱. بردارهای یکه..... ۱۶</p> <p>۷-۱. ضرب بردارها..... ۱۶</p> <p>۱-۷-۱. ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار..... ۱۷</p> <p>۲-۷-۱. ضرب نرده‌ای ( داخلی یا نقطه‌ای ) دو بردار..... ۱۷</p> <p>..... ۱۸</p> <p>۳-۷-۱. ضرب برداری ( خارجی ) دو بردار..... ۱۸</p> <p>۸-۱. نمونه مسائل حل شده..... ۲۰</p> <p>۹-۱. مسائل تکمیلی..... ۲۲</p> <p><b>فصل دوم: بار الکتریکی..... ۲۴</b></p> <p>۱-۲. بار الکتریکی..... ۲۴</p> <p>۲-۲. رساناها و نارساناها..... ۲۵</p> <p>۳-۲. قانون کولن..... ۲۷</p> <p>۴-۲. بار الکتریکی کوانتیده است..... ۲۹</p> <p>۵-۲. نمونه مسائل حل شده..... ۳۰</p> <p>۶-۲. مسائل تکمیلی..... ۳۵</p> <p><b>فصل سوم: میدان الکتریکی..... ۳۷</b></p> <p>۱-۳. میدان الکتریکی..... ۳۷</p> <p>۲-۳. خطوط میدان الکتریکی..... ۳۸</p> <p>۳-۳. میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای..... ۳۹</p> <p>۴-۳. نمونه‌های کاربردی میدان الکتریکی..... ۴۲</p> <p>۱-۳-۴. دو قطبی الکتریکی..... ۴۲</p> <p>۲-۳-۴. خط نامتناهی بار..... ۴۳</p> <p>۳-۳-۴. حلقه باردار..... ۴۴</p> <p>۴-۳-۴. قرص باردار پلاستیکی..... ۴۵</p> <p>۵-۳. دو قطبی الکتریکی در میدان الکتریکی..... ۴۵</p> <p>۶-۳. نمونه مسائل حل شده..... ۴۷</p>
---	--

۹-۹. قانون بیو- ساوار .....	۱۶۴	<b>فصل هفتم: جریان و مقاومت الکتریکی ..... ۱۰۷</b>	
۹-۱۰. نمونه مسائل حل شده.....	۱۶۶	۷-۱. جریان الکتریکی.....	۱۰۷
۹-۱۱. مسائل تکمیلی .....	۱۷۱	۷-۲. مقاومت .....	۱۰۹
<b>فصل دهم: القای الکترومغناطیسی..... ۱۷۴</b>		۷-۳. قانون اهم .....	۱۱۱
۱۰-۱. آزمایش های فارادی .....	۱۷۴	۷-۴. انتقال انرژی و توان.....	۱۱۴
۱۰-۲. شار مغناطیسی .....	۱۷۶	۷-۵. نمونه مسائل حل شده.....	۱۱۶
۱۰-۳. قانون القای فارادی .....	۱۷۷	۷-۶. مسائل تکمیلی.....	۱۱۸
۱۰-۴. قانون لنز .....	۱۷۹	<b>فصل هشتم: نیروی محرکه الکتریکی و مدارها ۱۱۹</b>	
۱۰-۵. محاسبه نیروی محرکه القایی .....	۱۸۱	۸-۱. نیروی محرکه الکتریکی.....	۱۱۹
۱۰-۶. میدان های مغناطیسی متغیر با زمان.....	۱۸۳	۸-۲. محاسبه جریان الکتریکی در مدار.....	۱۲۱
۱۰-۷. نمونه مسائل حل شده.....	۱۸۵	۸-۳. به هم بستن مقاومت ها در مدار.....	۱۲۳
۱۰-۸. مسائل تکمیلی.....	۱۸۹	۸-۳-۱. به هم بستن متوالی مقاومت ها.....	۱۲۳
<b>فصل یازدهم: القابیدگی ..... ۱۹۱</b>		۸-۳-۲. به هم بستن موازی مقاومت ها.....	۱۲۴
۱۱-۱. القاگرها.....	۱۹۱	۸-۴. وسایل اندازه گیری جریان و اختلاف پتانسیل	
۱۱-۲. مدارهای RL.....	۱۹۴	.....	۱۲۸
۱۱-۳. انرژی و میدان مغناطیسی .....	۱۹۶	۸-۵. مدارهای RC.....	۱۲۹
۱۱-۴. القای متقابل.....	۱۹۹	۸-۵-۱. شارژ ( بارگیری ) خازن.....	۱۳۰
۱۱-۵. نمونه مسائل حل شده.....	۲۰۲	۸-۵-۲. دشارژ ( بار دهی یا تخلیه ) خازن.....	۱۳۱
۱۱-۶. مسائل تکمیلی.....	۲۰۸	۸-۶. نمونه مسائل حل شده.....	۱۳۳
<b>فصل دوازدهم: خواص مغناطیسی مواد ..... ۲۰۹</b>		۸-۷. مسئله های تکمیلی.....	۱۴۱
۱۲-۱. قطب ها و دوقطبی ها.....	۲۰۹	<b>فصل نهم: میدان مغناطیسی و قانون آمپر .... ۱۴۴</b>	
۱۲-۲. قانون گاوس در مغناطیس .....	۲۱۰	۹-۱. میدان مغناطیسی.....	۱۴۴
۱۲-۳. خاصیت مغناطیسی زمین.....	۲۱۱	۹-۲. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان	
۱۲-۴. فرومغناطیس .....	۲۱۳	.....	۱۴۸
۱۲-۵. پارامغناطیس .....	۲۱۴	۹-۳. گشتاور نیروی وارد بر حلقه جریان .....	۱۵۱
۱۲-۶. دیا مغناطیس .....	۲۱۴	۹-۴. پدیده هال .....	۱۵۴
<b>پیوست ..... ۲۱۵</b>		۹-۵. رفتار ذرات باردار در میدان مغناطیسی .....	۱۵۶
<b>منابع: ..... ۲۱۶</b>		۹-۶. قانون آمپر .....	۱۵۸
		۹-۷. نیروی وارد در هادی های بلند.....	۱۶۰
		۹-۸. میدان مغناطیسی سیم لوله و چنبره .....	۱۶۱



## مقدمه

کتابی که در حال حاضر در اختیار دارید، به عنوان درس فیزیک الکتریسته برای دانشجویان دوره‌های کاردانی و حتی دوره‌ی کارشناسی رشته‌های فنی و مهندسی که هم‌زمان، ریاضیات آن را نیز می‌خوانند تدوین شده است و تأکید ما نیز بر آن می‌باشد که بتوانیم از نظر ریاضیات، دانشجویان را به پایه‌ای مناسب در زمینه اصول فیزیک کلاسیک و حل مسائل مربوط به آن برسانیم.

با توجه به این که منابعی که برای دانشجویان دوره‌های مختلف کاردانی و یا کارشناسی رشته‌های فنی و مهندسی معرفی می‌گردد، به گونه‌ای می‌باشند که یا سطح مطالب ارائه شده در آن‌ها، از سطح علمی دانشجویان بالاتر است و یا حجم آن‌ها خیلی زیاد می‌باشند، لذا در این کتاب، سعی شده است مطالب درسی، به گونه‌ای ارائه گردند که علاوه بر رعایت شدن سرفصل‌هایی که از طرف وزارت علوم تعیین شده است، سادگی مطالب و پیوستگی موضوعات درسی، به نحوی مطلوب حفظ گردد و از نظر حجم مطالب نیز آن‌چنان ناخوشایند و نگران کننده نباشد. برای این که مفاهیم مختلف فیزیک، برای دانشجویان قابل درک و فهم باشد، تلاش نمودیم تا تمامی مفاهیم درسی، به صورت بسیار ساده و روان معرفی گردد، طوری که علاوه بر گنجاندن بخش‌های معرفی مفاهیم و توضیحات مربوط به آن، مثال‌های متعددی را در سرتاسر هر فصل آوردیم و در انتهای هر فصل نیز، مسائلی جالب معرفی و حل گردید تا مطالب درسی به صورت کامل، برای دانشجویان قابل تحلیل باشد. همچنین در انتهای هر فصل، تعدادی مسئله آورده شده که حل آنها به عهده دانشجو گذاشته شده است.

یکی از اهداف مهمی که در تألیف این کتاب، منظور گردیده است، آشنایی دانشجویان با مفاهیم و قوانین فیزیک کلاسیک در زمینه فیزیک الکتریسته و مغناطیس می‌باشد که این عمل با معرفی بار الکتریکی و میدان الکتریکی در فصل‌های آغازین کتاب شروع می‌شود و در پی آن، در فصول بعدی با ارائه قانون گاوس و پتانسیل الکتریکی ادامه می‌یابد. سپس با معرفی خازن‌ها و مقاومت‌های الکتریکی به عنوان ادواتی که در الکتریسته استفاده می‌شوند، مطالب را ادامه می‌دهیم و با بحث در زمینه جریان الکتریکی، مفاهیم الکتریسته را خاتمه می‌دهیم.

در بحث فیزیک مغناطیس نیز پس از معرفی میدان مغناطیسی، به مفاهیمی در مورد قوانین آمپر و لنز و پدیده‌های فیزیکی مربوط به آن می‌پردازیم و در پی آنها قانون بیو – ساوار و قانون القای فارادی را معرفی و سپس بحث القائیدگی را ارائه نمودیم. در انتها نیز در مورد خواص مغناطیسی مواد نیز مباحثی را در میان گذاشتیم. جا دارد از خانم میترا حبیب زاده که ما را در تایپ، صفحه آرایی و ویراستاری این کتاب یاری نموده، تشکر نماییم.

در پایان از تمامی خوانندگان عزیز (اساتید و دانشجویان) تقاضا داریم، هرگونه اشکال، ابهام در متن کتاب، پیشنهادات و انتقادات را به آدرس پست الکترونیک [fanavarienovin@gmail.com](mailto:fanavarienovin@gmail.com) ارسال نمایند.

بابل، پاییز ۱۳۹۲

مؤلف

نام کتاب	لینک خرید چاپی	لینک خرید الکترونیکی	لینک فایل نمونه
مبانی رایانه و برنامه‌نویسی به زبان C++	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_80238.html">http://daneshnegar.com/book_3_80238.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b30588">http://ktbr.ir/b30588</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52319">http://ketabesabz.com/dl/52319</a>
آشنایی با مبانی امنیت شبکه (امنیت اطلاعات)	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_71137.html">http://daneshnegar.com/book_3_71137.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b30327">http://ktbr.ir/b30327</a>	
اصول طراحی پایگاه داده‌ها	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_71655.html">http://daneshnegar.com/book_3_71655.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29943">http://ktbr.ir/b29943</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52155">http://ketabesabz.com/dl/52155</a>
آموزش گام به گام برنامه‌نویسی پایتون	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92582.html">http://daneshnegar.com/book_3_92582.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29984">http://ktbr.ir/b29984</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52181">http://ketabesabz.com/dl/52181</a>
حل مسائل C++ (آزمایشگاه کامپیوتر مرجع کامل)	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92262.html">http://daneshnegar.com/book_3_92262.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29982">http://ktbr.ir/b29982</a>	
آموزش گام به گام LINQ با C#	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_69388.html">http://daneshnegar.com/book_3_69388.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28451">http://ktbr.ir/b28451</a>	
ساختمان داده‌ها با C++	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_79094.html">http://daneshnegar.com/book_3_79094.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29676">http://ktbr.ir/b29676</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52156">http://ketabesabz.com/dl/52156</a>
طراحی سیستم‌های شی گرا با زبان C#	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_74658.html">http://daneshnegar.com/book_3_74658.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29621">http://ktbr.ir/b29621</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52126">http://ketabesabz.com/dl/52126</a>
مدیریت استراتژیک فناوری اطلاعات	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_74659.html">http://daneshnegar.com/book_3_74659.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29779">http://ktbr.ir/b29779</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52125">http://ketabesabz.com/dl/52125</a>
گرافیک رایانه‌ای با زبان برنامه‌نویسی C#	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_76021.html">http://daneshnegar.com/book_3_76021.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29674">http://ktbr.ir/b29674</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/51049">http://ketabesabz.com/dl/51049</a>
درس و کنکور پایگاه داده پیشرفته	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92578.html">http://daneshnegar.com/book_3_92578.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29644">http://ktbr.ir/b29644</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52102">http://ketabesabz.com/dl/52102</a>
فیزیک الکترونیسته	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_79161.html">http://daneshnegar.com/book_3_79161.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29680">http://ktbr.ir/b29680</a>	
تجارت الکترونیکی	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_79188.html">http://daneshnegar.com/book_3_79188.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b29619">http://ktbr.ir/b29619</a>	
راهنمای کاربردی کاربری OPNET برای شبکه‌های شبیه‌سازی کامپیوتر	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92583.html">http://daneshnegar.com/book_3_92583.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28504">http://ktbr.ir/b28504</a>	
درس و کنکور سیستم عامل پیشرفته	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92580.html">http://daneshnegar.com/book_3_92580.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28505">http://ktbr.ir/b28505</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/52180">http://ketabesabz.com/dl/52180</a>
شبکه‌های کامپیوتری با رویکرد کاربردی، آزمایشگاه شبیه‌سازی شبکه	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92254.html">http://daneshnegar.com/book_3_92254.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28528">http://ktbr.ir/b28528</a>	
آزمایشگاه پایگاه داده SQL Server با 2012	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_77301.html">http://daneshnegar.com/book_3_77301.html</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28503">http://ktbr.ir/b28503</a>	<a href="http://ketabesabz.com/dl/53447">http://ketabesabz.com/dl/53447</a>



	<a href="http://ktbr.ir/b28450">http://ktbr.ir/b28450</a>	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_75892.html">http://daneshnegar.com/book_3_75892.html</a>	کاربرد رایانه در مدیریت و حسابداری
	<a href="http://ktbr.ir/b28449">http://ktbr.ir/b28449</a>	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_68929.html">http://daneshnegar.com/book_3_68929.html</a>	آموزش گام به گام برنامه نویسی بانک اطلاعاتی با ویژوال بیسیک نت
	<a href="http://ktbr.ir/b28452">http://ktbr.ir/b28452</a>	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_80238.html">http://daneshnegar.com/book_3_80238.html</a>	آموزش گام به گام برنامه نویسی به زبان C++
<a href="http://ketabesabz.com/dl/51047">http://ketabesabz.com/dl/51047</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28448">http://ktbr.ir/b28448</a>	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_68486.html">http://daneshnegar.com/book_3_68486.html</a>	دانلود کتاب آموزش گام به گام برنامه نویسی بانک اطلاعاتی با C#
	<a href="http://ktbr.ir/b28398">http://ktbr.ir/b28398</a>		حل مسائل پاسکال
<a href="http://ketabesabz.com/dl/51048">http://ketabesabz.com/dl/51048</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28401">http://ktbr.ir/b28401</a>	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_92262.html">http://daneshnegar.com/book_3_92262.html</a>	حل مسائل C++
<a href="http://ketabesabz.com/dl/51011">http://ketabesabz.com/dl/51011</a>	<a href="http://ktbr.ir/b28399">http://ktbr.ir/b28399</a>	<a href="http://daneshnegar.com/book_3_74657.html">http://daneshnegar.com/book_3_74657.html</a>	دانلود کتاب حل مسائل C#
	<a href="http://ktbr.ir/b28397">http://ktbr.ir/b28397</a>		دانلود کتاب حل مسائل C

## مقدمه

می‌دانیم که در فیزیک، کمیت‌ها به دو دسته: کمیت‌های نرده‌ی و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند که کمیت‌های نرده‌ای فقط دارای اندازه می‌باشند و کمیت‌های برداری، علاوه بر اندازه، دارای جهت نیز می‌باشند. برای توصیف کمیت‌های برداری، به زبان ریاضی خاصی به نام «زبان بردارها» نیاز داریم. این زبان برداری نه تنها در علوم مهندسی و علوم دیگر کاربرد دارد، بلکه در زبان عامیانه نیز به کار می‌رود. مثلاً وقتی آدرسی را به این صورت به کسی می‌دهید- تعداد دو چهارراه پایین‌تر، خیابان سمت راست، سومین کوچه سمت چپ- از زبان بردارها استفاده نموده‌اید. در واقع هر نوع جهت‌شناسی، بر اصول بردارها مبتنی خواهد بود که در علوم فیزیک و مهندسی، برای شناخت و تحلیل پدیده‌های مختلف، از اصول و روش‌های ویژه‌ای از بردارها، استفاده می‌کنند که به آنالیز برداری موسوم است. در این فصل به مفاهیم اولیه بردارها و جبر ساده برداری می‌پردازیم.

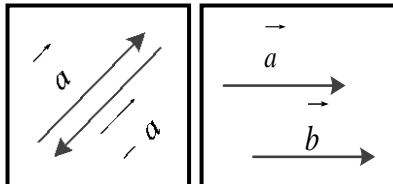
## ۱-۱. نمایش بردار

برای نشان دادن یک بردار از یک خط راست و یک پیکان در نقطه انتهایی استفاده می‌شود. طول این خط راست، متناسب با مقدار کمیت مورد بحث و جهت آن، جهت کمیت مذکور می‌باشد. برای علامت‌گذاری یک کمیت برداری، روش واحدی وجود ندارد و معمولاً از حروف کوچک انگلیسی که بالای آن علامت بردار قرار دارد، استفاده می‌کنند و یا از حروف انگلیسی بزرگ به عنوان نقاط شروع و پایانی بردار با یک علامت بردار روی این دو حرف استفاده می‌کنند، یعنی به صورت  $\vec{a}$  یا  $\vec{AB}$  که نقطه شروع و نقطه  $B$  نقطه مقصد کمیت می‌باشد.

اگر روی حرف کوچک انگلیسی و یا دو حرف بزرگ انگلیسی، علامت بردار نباشد و یا این علامت‌ها در داخل قدر مطلق قرار داشته باشند (یعنی به صورت  $a$  یا  $|\vec{a}|$  و یا  $AB$  یا  $|\vec{AB}|$  باشد) منظور، اندازه بردار می‌باشد. مثلاً اگر اندازه بردار  $\vec{a}$  برابر  $4Km$  باشد، می‌توان

چنین گفت:  $|\vec{a}| = a = 4Km$  ولی  $\vec{a} = 4Km$  بی معنی خواهد بود، زیرا در سمت چپ، یک کمیت برداری و در سمت راست، یک کمیت نرده‌ای وجود دارد.

برای نمایش قرینه‌ی یک بردار، کافی است که جهت آن بردار عوض شود که در شکل ۱-۱ الف نمایش داده شده است.

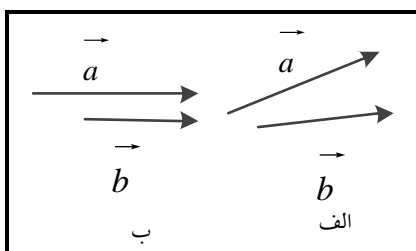


الف

ب

همچنین دو بردار، وقتی با هم مساوی می‌باشند که شکل ۱-۱. دو بردار الف: قرینه و ب: مساوی هم.

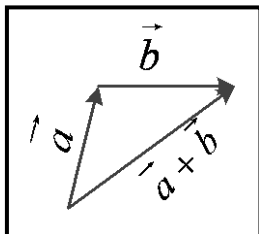
دارای اندازه و جهت مساوی هم باشند البته می‌بایست واحدهای آن‌ها نیز یکی باشد. بنابراین دو بردار مساوی، موازی هم نیز خواهند بود و جهت آن‌ها یکسان می‌باشد. (شکل ۱-۱-ب).  
 ممکن است دو بردار دارای اندازه‌های برابر باشند ولی جهت آن‌ها یکسان نباشد (شکل ۱-۲-الف) و نیز ممکن است دو بردار دارای جهت‌های یکسان باشد ولی اندازه‌هایشان برابر نباشد (شکل ۱-۲-ب). در این حالات، این دو بردار با هم برابر نمی‌باشند.



شکل ۱-۲. بردارهای نامساوی با هم. در شکل الف بردارهای  $a$  و  $b$  اندازه‌های یکسان و جهت‌های مختلف دارند و در شکل ب جهت بردارها یکسان و اندازه آن‌ها متفاوت می‌باشد.

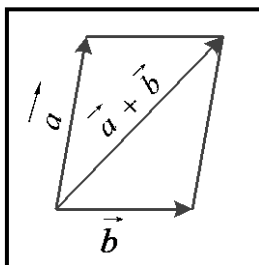
## ۱-۲. قوانین جمع بردارها

معمولاً برای جمع بردارها، هم می‌توانیم از روش هندسی استفاده کنیم و هم از روش جبری. برای ترکیب دو یا چند بردار، ابتدا روش‌های هندسی را ارائه می‌دهیم و سپس با معرفی جبر برداری، به ترکیب بردارها با استفاده از جبر برداری می‌پردازیم.



شکل ۱-۳. جمع بردارهای  $a$  و  $b$  به روش مثلثی.

اولین روش هندسی برای ترکیب بردارها، روش مثلثی است. در این روش اگر دو بردار  $a$  و  $b$  در اختیار باشد، برای به دست آوردن مجموع این دو بردار که آن‌ها را با  $a+b$  نمایش می‌دهیم، ابتدا بردار  $b$  را از انتهای بردار  $a$  رسم می‌کنیم و پس از آن، ابتدای بردار  $a$  را به انتهای بردار  $b$  رسم می‌کنیم. این بردار حاصل، بردار  $a+b$  خواهد بود. در شکل ۱-۳ این روش، نمایش داده شده است. از آن جایی که در این روش، سه بردار رسم شده، تشکیل یک مثلث را می‌دهند، به این روش، روش مثلثی گفته می‌شود.



شکل ۱-۴. جمع بردارهای

روش دیگری هم برای جمع دو بردار وجود دارد که روش متوازی‌الاضلاع نام دارد. در روش متوازی‌الاضلاع دو بردار  $a$  و  $b$  از یک نقطه مشترک رسم می‌شوند. با ساختن متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن بردارهای  $a$  و  $b$  می‌باشند، قطر این متوازی‌الاضلاع (همان‌طور که در شکل ۱-۴ نیز نشان داده شده است) بردار  $a+b$  خواهد بود.

تنها نکته قابل ذکر این است که در تفریق برداری  $a-b$ ، کافی است که

بردار  $-b$  را با بردار  $a$  جمع کنیم. بدین صورت که:

$$(1-1) \quad a - b = a + (-b) \quad \text{a و b به روش متوازی الاضلاع.}$$

تا این مرحله از بحث، روش‌های هندسی جمع بردارها را معرفی نمودیم. حال با استفاده از روش‌هایی که آموختیم می‌خواهیم خواص جمع بردارها را بحث کنیم. این خواص عبارتند از:

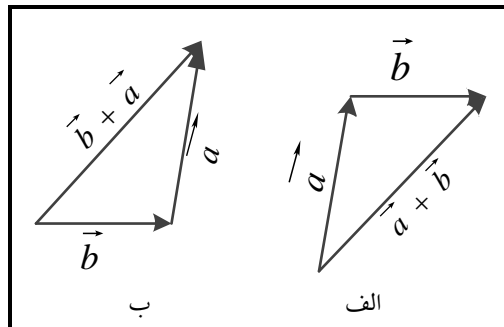
الف. خاصیت جابه‌جایی: در جمع دو یا چند بردار، اگر جای دو بردار را عوض کنیم، تغییری در حاصل، به وجود نمی‌آید. به عبارت ریاضی:

$$a + b = b + a \quad (1-2)$$

این خاصیت را با استفاده از روش مثلثی و متوازی‌الاضلاع، به سادگی می‌توان تحقیق کرد. در شکل ۱-۵ این خاصیت اثبات شده است.

ب. خاصیت شرکت پذیری (انجمنی): این قضیه به صورت زیر بیان می‌گردد:

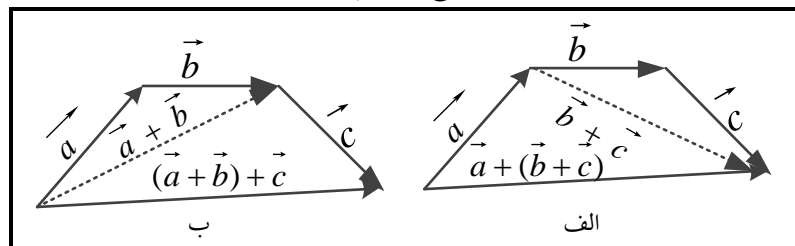
$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (1-3)$$



شکل ۱-۵. در شکل الف حاصل  $a+b$  و در شکل ب حاصل  $b+a$  رسم شده است.

کاملاً پیداست که این دو روش، خاصیت جابه‌جایی را تصدیق می‌کند.

برای اثبات این قضیه، ابتدا برای سمت چپ رابطه، کافی است که دو بردار  $b$  و  $c$  را با هم جمع سپس و حاصل این عبارت را با بردار  $a$  جمع می‌کنیم. (شکل ۱-۶-الف) برای سمت راست نیز، ابتدا دو بردار  $a$  و  $b$  را با هم جمع کرده و حاصل این عبارت را با بردار  $c$  جمع می‌کنیم. (شکل ۱-۶-ب)



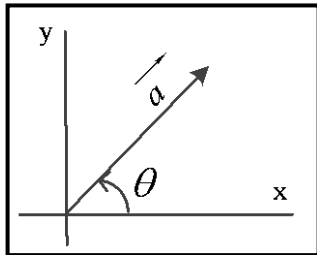
شکل ۱-۶. در شکل الف بردار  $a + (b + c)$  و در شکل ب بردار  $(a + b) + c$  نمایش داده شده است.

### ۱-۳. تألیف (تجزیه) یک بردار

با توجه به آن‌چه تاکنون گفته شد، جهت یک بردار، با علامت پیکان مشخص می‌شود. اگر بخواهیم یک بردار را با این روش، برای شخصی معین نماییم، تنها راه این است که بردار را به او نشان دهیم و همان‌طور که می‌دانیم، این امکان همیشه وجود ندارد که بتوانیم دقیقاً جهت بردار را با این روش نشان دهیم.

یک روش مفید برای نشان دادن جهت یک بردار، استفاده از زاویه می‌باشد؛ شبیه به آن چه که در جغرافیا مرسوم می‌باشد. در جغرافیا، صفحه را به چهار جهت اصلی شمال، جنوب، شرق و غرب تقسیم می‌کنند و هر نقطه را با سمت گیری آن نقطه در این چهار جهت نشان می‌دهند.

روش بیان جهت یک بردار، به این ترتیب می‌باشد که در صفحه، دو محور عمود بر هم را در نظر می‌گیرند



(محورهای مختصات  $x$  و  $y$ ) و جهت هر بردار را با تعیین زاویه‌ای که بردار با یکی از محورها می‌سازد، مشخص می‌کنند، یعنی ابتدا بردار مورد نظر را از مبدأ مختصات رسم نموده و سپس زاویه‌ی این بردار را نسبت به محورهای مذکور، تعیین می‌کنند. (شکل ۷-۱)

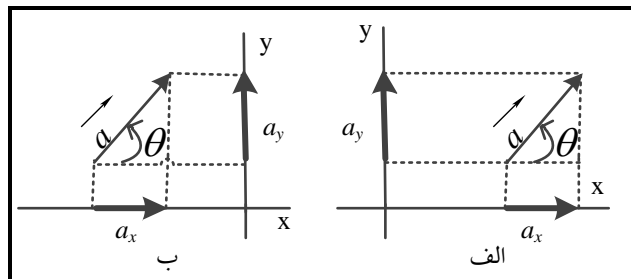
شکل ۷-۱ رسم یک بردار در دستگاه مختصات

زاویه‌ای که هر بردار با محورهای مختصات می‌سازد را با اندازه‌ی

زاویه‌ای که جهت پادساعتگرد با محورهای مختصات دارد، در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل ۷-۱ زاویه‌ای که بردار  $a$  با محور  $x$  می‌سازد  $\theta$  می‌باشد. حال می‌خواهیم در مورد اندازه هر بردار روی محورهای مختصاتی بحث کنیم. اگر از ابتدا و انتهای برداری که در دستگاه مختصات رسم شده است، خطی عمود بر محور مختصات رسم شود، اندازه بین نقاط ابتدایی و انتهایی بردار، مؤلفه بردار مورد نظر روی آن محور مختصات خواهد بود.

مؤلفه‌های یک بردار، تصویر آن بردار روی محورهای مختصات می‌باشد. به طور نمونه در شکل ۸-۱،  $a_x$

مؤلفه بردار  $a$  در راستای محور  $x$  و همچنین  $a_y$  مؤلفه بردار  $a$  در راستای محور  $y$  می‌باشد.



شکل ۸-۱. الف) مؤلفه‌های بردار  $a$  در محورهای  $x$  و  $y$ . ب) اگر این بردار در دستگاه مختصات جابه‌جا شود، مادامی که اندازه و جهت آن تغییر نکند، مؤلفه‌های آن در این دستگاه مختصات، تغییر نمی‌کند.

در شکل ۸-۱ اگر کمی دقت کنید، می‌توانید نتیجه بگیرید که اندازه مؤلفه بردار  $a$  در راستای محورهای  $x$

$$\text{و } \text{Sin}\theta = a_y / a \quad \text{و} \quad \text{Cos}\theta = a_x / a \quad \text{و لا به صورت زیر خواهد بود:}$$

و با این دو رابطه، می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$a_x = a \text{ Cos}\theta \quad \text{و} \quad a_y = a \text{ Sin}\theta \quad (۴-۱)$$

در این رابطه‌ها،  $\theta$  زاویه‌ای است که بردار  $a$  با محور  $x$  می‌سازد. همچنین قابل ذکر است که اگر برداری به

مؤلفه‌هایش روی محورهای مختصاتی تجزیه شود، با این مؤلفه‌ها نیز می‌بایست به صورت برداری رفتار نمود.

حال اگر مؤلفه‌های یک بردار را داشته باشیم، می‌توانیم برای تبدیل این مؤلفه‌ها به بردار اصلی، از روابط زیر استفاده کنیم تا بردار اصلی و زاویه آن با محور  $x$  را محاسبه کنیم:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1}(a_y / a_x) \quad (5-1)$$

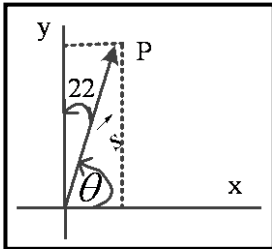
**مثال ۱-۱** مؤلفه‌های بردار  $a$  که اندازه آن ۵ واحد و زاویه آن نسبت به محور  $y$ ها  $30^\circ$  می‌باشد را محاسبه کنید.

حل: چون این بردار با محور  $y$ ها زاویه  $30^\circ$  می‌سازد، پس با محور  $x$ ها، زاویه  $60^\circ$  می‌سازد و لذا:

$$a_y = a \sin 60 = 5 \times (\sqrt{3}/2) = 4.33 \quad \text{و} \quad a_x = a \cos 60 = 5 \times (1/2) = 2.5$$

**مثال ۲-۱** فرض کنید در یک روز بارانی، هواپیمایی فرودگاهی را ترک می‌کند و ۲۱۵ کیلومتر دورتر در جهتی که با خط شمال، زاویه‌ای  $22^\circ$  درجه‌ای می‌سازد، دیده می‌شود. هواپیمای فوق در چه فاصله‌ای از شرق و شمال فرودگاه قرار دارد؟

همان‌طور که در شکل ۹-۱ نشان داده شده است، زاویه بردار  $S$  یعنی برداری که فاصله تا فرودگاه را نشان



می‌دهد با محور  $x$ ها زاویه  $90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$  می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$S_y = S \sin 68^\circ = 199 \text{ Km} \quad \text{و} \quad S_x = S \cos 68^\circ = 81 \text{ Km}$$

نکته‌ای بسیار مهم را که باید یادآوری کنیم این است که برای به دست آوردن زاویه میان بردار و محور  $x$  که آن را  $\theta$  نامیدیم و با رابطه (۵-۱) معرفی کردیم باید به علامت مقادیر  $a_x$  و  $a_y$  نیز توجه نمود.

**شکل ۱-۱** هواپیما از فرودگاه حرکت و به نقطه  $P$  می‌رسد

از روی علامت مؤلفه‌های یک بردار و با استفاده از جدول ۱-۱ می‌توان ناحیه‌ای که  $\theta$  در آن ناحیه قرار

دارد را شناسایی نمود. سپس مقدار  $\theta$  را با راهنمایی‌های ذیل شناخت:

☒ برای محاسبه زاویه  $\theta$ ، ابتدا رابطه (۵-۱) یعنی  $\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{a_y}{a_x} \right|$  را محاسبه می‌کنیم.

☒ با توجه به جدول (۱-۱)، اگر  $\theta$  را در ناحیه اول باشد،  $\theta = \alpha$  خواهد بود.

☒ اگر  $\theta$  در ناحیه دوم باشد،  $\theta = 180 - \alpha$  زاویه بردار مورد بحث با محور  $x$ ها خواهد بود.

☒ اگر  $\theta$  در ناحیه سوم قرار داشته باشد،  $\theta = 180 + \alpha$  جواب مورد نظرمان خواهد بود.

☒ و بالاخره اگر در ناحیه چهارم باشد،  $\theta = -\alpha$  جواب مورد نظرمان خواهد بود.

جدول ۱-۱ علامت مؤلفه‌های یک بردار در ناحیه‌های چهارگانه دستگاه مختصات		
علامت $a_y$	علامت $a_x$	ناحیه‌ای که $\theta$ در آن قرار دارد
+	+	اول
+	-	دوم
-	-	سوم
-	+	چهارم

**مثال ۳-۱** اگر مؤلفه‌های یک بردار به صورت  $a_x = 30P$  و نیز  $a_y = 40P$  باشند، بردار  $a$  در حالت‌های

الف)  $p=1$  و  $q=1$  ب)  $p=-1$  و  $q=1$  ج)  $p=-1$  و  $q=-1$  د)  $p=1$  و  $q=-1$  محاسبه کنید.

حل: الف) در این حالت چون  $a_x = 30$  و  $a_y = 40$  می‌باشد لذا بردار  $a$  در ناحیه اول می‌باشد و لذا:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1}(40/(30)) = 53^\circ$$

و چون در ناحیه اول است، پس  $\theta = \alpha = 53^\circ$  می‌باشد.

ب) در این حالت چون  $a_x = -30$  و  $a_y = 40$  می‌باشد. لذا بردار  $a$  در ناحیه دوم می‌باشد و لذا:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-30)^2 + 40^2} = 50 \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1}(40/30) = 53^\circ$$

و چون در ناحیه دوم است، پس  $\theta = 180 - 53 = 127^\circ$  می‌باشد.

ج) در این حالت نیز به دلیل این که  $a_x = -30$  و  $a_y = -40$  می‌باشد. لذا بردار  $a$  در ناحیه سوم واقع می‌-

شود و لذا:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1}((-40)/(-30)) = 53^\circ$$

و از آن جایی که در ناحیه سوم است، پس  $\theta = 180 + 53 = 233^\circ$  می‌باشد.

د) در این حالت نیز به دلیل این که  $a_x = 30$  و  $a_y = -40$  می‌باشد لذا بردار  $a$  در ناحیه چهارم واقع می‌شود

$$\text{و لذا:} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{30^2 + (-40)^2} = 50 \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1}((-40)/30) = 53^\circ$$

و از آن جایی که در ناحیه چهارم است، پس  $\theta = -53^\circ$  می‌باشد.

#### ۴-۱. جمع بردارها از طریق مؤلفه‌ها

اگر بردار  $r$ ، برآیند (مجموع) دو بردار  $a$  و  $b$  باشد، لذا:

$$r = a + b \quad (6-1)$$

این سه بردار را در دستگاه مختصات همانند شکل ۱-۱۰ رسم می‌کنیم. همان‌گونه که در شکل مشاهده شده

است، رابطه زیر بین مؤلفه‌های این سه بردار و برقرار می‌باشد:

$$r_x = a_x + b_x \quad \text{و} \quad r_y = a_y + b_y \quad (7-1)$$

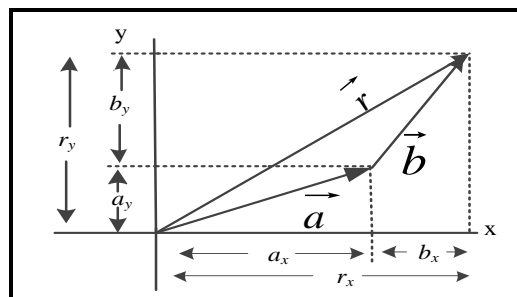
بنا بر روابط (۷-۱)، برای به دست آوردن مجموع دو بردار، ابتدا هر بردار را می‌توان به مؤلفه‌هایش تجزیه

نمود و سپس مجموع مؤلفه‌های این بردار را روی هر محور مساوی با مؤلفه بردار برآیند روی همان بردار در

نظر گرفت. با داشتن مؤلفه‌های بردار برآیند و با استفاده از روابط (۵-۱)، اندازه و جهت بردار برآیند به

سادگی قابل شناخت خواهد بود. این روش که شاید ساده‌ترین روش جمع بردارها می‌باشد، جمع بردارها از

طریق مؤلفه‌ها نامیده می‌شود.



شکل ۱-۱۰. رابطه میان جمع دو بردار و مؤلفه‌های آنها

**مثال ۴-۱.** اندازه بردار  $a$  برابر برابر ۴ واحد و اندازه بردار  $b$ ، معادل ۶ واحد می‌باشد. زاویه‌ای که بردار  $a$  با محور  $x$  می‌سازد  $60^\circ$  و زاویه‌ای که بردار  $b$  با این محور می‌سازد  $30^\circ$  می‌باشد. مجموع دو بردار  $a$  و  $b$  جهت آن را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطه مؤلفه‌ها یعنی (۴-۱)، ابتدا مؤلفه‌های بردارها را محاسبه می‌کنیم:

$$a_y = a \sin 60 = 4(\sqrt{3}/2) = 3.4 \quad \text{و} \quad a_x = a \cos 60 = 4(1/2) = 2$$

$$b_y = b \sin 30 = 6(1/2) = 3 \quad \text{و} \quad b_x = b \cos 30 = 6(\sqrt{3}/2) = 5.1$$

حال با استفاده از رابطه‌های (۷-۱)، مؤلفه‌های بردار برآیند را حساب می‌کنیم:

$$r_x = a_x + b_x = 2 + 5.1 = 7.1 \quad \text{و} \quad r_y = a_y + b_y = 3.4 + 3 = 6.4$$

و بالاخره با استفاده از رابطه (۵-۱)، اندازه بردار برآیند و جهت آنرا به دست می‌آوریم:

$$\theta = \tan^{-1}(r_y / r_x) = \tan^{-1}(6.4 / 7.1) = 42^\circ \quad \text{و} \quad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(7.1)^2 + (6.4)^2} = 9.56$$

## ۵-۱. محاسبه اندازه مجموع دو بردار

اگر دو بردار  $a$  و  $b$  را بخواهیم جمع کنیم، در صورت داشتن اندازه بردارهای  $a$  و  $b$  و دانستن زاویه بین آن‌ها، بزرگی (اندازه) بردار  $a+b$  را می‌توانیم محاسبه کنیم. به این ترتیب که اگر  $|a|$  بزرگی بردار  $a$  و

همچنین  $|b|$  بزرگی بردار  $b$  باشد و البته  $\theta$  زاویه میان بردارهای  $a$  و  $b$  باشد:

$$r^2 = |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta \quad (۸-۱)$$

همچنین برای تفاضل دو بردار نیز چنین داریم:

$$s^2 = |a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta \quad (۹-۱)$$

لازم به ذکر است که رابطه‌های (۸-۱) و (۹-۱)، فقط اندازه بردارهای  $r$  و  $s$  را به ما می‌دهند و در مورد جهت بردار برآیند، اطلاعاتی را در اختیار ما قرار نمی‌دهند.

**مثال ۵-۱.** هرگاه دو بردار به بزرگی‌های ۸ واحد و ۶ واحد با هم ترکیب شوند، در چه صورت می‌توان از ترکیب آن‌ها، برداری به اندازه الف) ۱۴ واحد و ب) ۲ واحد و ج) ۱۰ واحد داشته باشیم؟

حل: الف) با استفاده از رابطه (۸-۱) چنین داریم:

$$14^2 = 8^2 + 6^2 + 2(8)(6)\cos\theta = 100 + 96\cos\theta$$

با کمی ساده‌سازی ارقام، کاملاً پیداست که:  $\cos\theta = 1$  و یا:  $\theta = 0^\circ$ . یعنی اگر این دو بردار در جهت

هم با همدیگر ترکیب (جمع) شوند، بردار برآیند، ۱۴ واحدی خواهد بود.

ب) باز هم با استفاده از رابطه (۸-۱) خواهیم داشت:

$$2^2 = 8^2 + 6^2 + 2(8)(6)\cos\theta = 100 + 96\cos\theta$$

با محاسباتی ساده خواهیم داشت که:  $\cos\theta = -1$  و  $\theta = 180^\circ$ . یعنی اگر بردار ۸ واحدی در جهت مثبت و

برداری ۶ واحدی در جهت منفی باشد، بردار برآیند، ۲ واحدی خواهد بود.

ج) در این قسمت نیز ابتدا از رابطه (۸-۱) استفاده می‌کنیم:

$$10^2 = 8^2 + 6^2 + 2(8)(6)\cos\theta = 100 + 96\cos\theta$$

که با ساده کردن اعداد، به دست می‌آید و لذا  $\theta = 90^\circ$ . بنابراین اگر بردار ۸ واحدی و ۶

واحدی عمود بر هم باشند، اندازه بردار برآیند آن‌ها، ۱۰ واحد طول خواهد داشت.

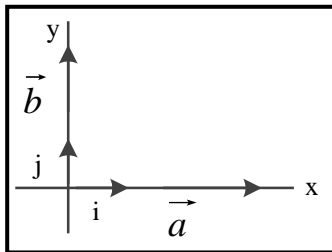


## ۶-۱. بردارهای یکه

بردارهایی که تاکنون بحث نمودیم، دارای اندازه و جهت مختلف بودند. در پی آن هستیم که بردارهای یکه را معرفی کنیم که این بردارها، برداری هستند که بزرگی (اندازه) آنها، برابر با واحد (یک) و جهت آن، سوی مثبت یکی از محورهای مختصات می‌باشد. بردارهای یکه، بُعد و یکا (واحد) ندارند و تنها برای مشخص نمودن جهت محورهای مختصات مربوط به خود، استفاده می‌شوند.

در دستگاه مختصات دکارتی، بردار یکه در جهت محور  $x$  را با  $\hat{i}$  و در جهت محور  $y$  را با  $\hat{j}$  نمایش می‌دهند. همچنین بردار یکه در جهت محور  $z$  را با  $\hat{k}$  نمایش می‌دهند. بر طبق قرارداد علامت « $\hat{\quad}$ » روی حروف  $i$  و  $j$  و  $k$ ، بیان گر این موضوع می‌باشد که این بردارها، بردارهای یکه می‌باشند.

شکل ۱۱-۱ را در نظر بگیرید. در این شکل، می‌توان ادعا نمود که:  $a = |a|\hat{i}$  و نیز  $b = |b|\hat{j}$ . حال



اگر بردار  $r$  را برآیند این دو بردار در نظر بگیریم، می‌توان رابطه‌ای به صورت زیر را مطرح نمود:

$$r = a + b = |a|\hat{i} + |b|\hat{j}$$

همچنین می‌توان با استفاده از تعریف  $r_x = |a|$  و  $r_y = |b|$  نتیجه گرفت:

$$r = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} \quad (10-1)$$

شکل ۱۱-۱. دو بردار  $a$  و  $b$  روی محورهای مختصات

این رابطه، یک رابطه کلی است که برای هر بردار دلخواهی، برقرار است.

**مثال ۶-۱.** سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  را به صورت‌های  $a = 4\hat{i} - \hat{j}$  و  $b = -3\hat{i} + 2\hat{j}$  و  $c = -3\hat{j}$  در نظر بگیرید. برآیند این سه بردار را محاسبه کنید.

حل: برآیند این سه بردار، به صورت می‌باشد، یعنی:

$$r = (4\hat{i} - \hat{j}) + (-3\hat{i} + 2\hat{j}) + (-3\hat{j}) = (4\hat{i} - 3\hat{i}) + (-\hat{j} + 2\hat{j} - 3\hat{j}) = \hat{i} - 2\hat{j}$$

حال باید اندازه و زاویه این بردار برآیند را محاسبه کنیم:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1}(r_y/r_x) = \tan^{-1}(-2/1) = 63^\circ$$

و چون  $r_x$  و  $r_y$  به گونه‌ای است که  $r$  در ناحیه چهارم قرار می‌گیرد، بنابراین  $\theta = -63^\circ$  خواهد بود.

نکته قابل ذکر این است که اگر بخواهیم بردار را در سه بعد تعریف کنیم، به این صورت عمل می‌کنیم:

$$r = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \quad \text{و} \quad |r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (11-1)$$

این رابطه اخیر، شکل کلی نمایش یک بردار بر حسب مؤلفه‌هایش می‌باشد.

## ۷-۱. ضرب بردارها

می‌توان گفت که ضرب بردارها به سه گونه می‌باشد. دسته اول، ضرب یک کمیت اسکالر یا عدد، در یک

بردار است. دو دسته بعدی، ضرب دو بردار در هم می‌باشد. این روش‌ها را بررسی می‌کنیم:

### ۱-۷-۱. ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار

اگر یک کمیت نرده‌ای یا یک عدد را بخواهید در یک بردار ضرب کنید، بردار جدیدی حاصل می‌شود که در راستای بردار اولیه می‌باشد و اندازه آن نیز در کمیت نرده‌ای یا عدد آن ضرب می‌شود لیکن جهت بردار نهایی به گونه‌ای است که اگر کمیت نرده‌ای یا عدد آن، مثبت باشد، بردار نهایی در جهت بردار اولیه است و اگر آن کمیت نرده‌ای یا آن عدد، منفی باشد، جهت بردار حاصل، در خلاف جهت بردار اولیه است.

**مثال ۷-۱.** بردار  $a = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  را در نظر بگیرید. بردارهای الف)  $b = 2a$  و ب)  $c = -3a$  را محاسبه کنید.

حل: بردار  $b = 2a$  به صورت زیر خواهد بود:

$$b = 2a = 2(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

اگر با استفاده از رابطه (۱-۱۱) بزرگی بردارهای  $a$  و  $b$  را محاسبه کنیم، آن گاه:

$$|a| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \quad \text{و} \quad |b| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}$$

یعنی طول بردار  $b$ ، دو برابر طول بردار  $a$  می‌باشد.

ب) بردار  $c = -3a$  نیز به این صورت می‌باشد:

$$c = -3a = -3(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = -3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

و اگر بخواهیم اندازه بردار  $c$  را محاسبه کنیم:

$$|c| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

کاملاً واضح است که طول بردار  $c$  سه برابر طول بردار  $a$  بوده ولی جهت آن در خلاف جهت بردار  $a$  می‌باشد.

### ۱-۷-۲. ضرب نرده‌ای ( داخلی یا نقطه‌ای ) دو بردار

اگر دو بردار  $a$  و  $b$  که با هم زاویه  $\theta$  می‌سازند در هم ضرب نقطه‌ای گردند، حاصل آن را به صورت:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos\theta \quad (12-1)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجایی که طرف راست رابطه فوق خاصیت جابه‌جایی دارد، پس سمت چپ نیز خاصیت جابه‌جایی خواهد داشت و لذا می‌توان ادعا نمود که ضرب نقطه‌ای دو بردار، خاصیت جابه‌جایی دارد.

در این مرحله از بحث در نظر داریم ضرب نقطه‌ای ( داخلی ) دو بردار را از نظر مؤلفه‌ای محاسبه کنیم. برای

این منظور، دو بردار  $a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$  و  $b = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$  را در نظر می‌گیریم. در دستگاه

مختصات، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1) \quad (1) \quad \cos 0 = 1 \quad \text{و} \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = (1) \quad (1) \quad \cos 90 = 0$$

بنابراین، برای ضرب نقطه‌ای دو بردار  $a$  و  $b$ ، این نتیجه‌گیری میسر می‌باشد:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = \\ &= a_x b_x \hat{i} \cdot \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \cdot \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \cdot \hat{k} + a_y b_x \hat{j} \cdot \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \cdot \hat{j} \\ &\quad + a_y b_z \hat{j} \cdot \hat{k} + a_z b_x \hat{k} \cdot \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \cdot \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

اگر مقادیر ضرب نقطه‌ای بردارهای یکه را جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (13-1)$$

این رابطه، ضرب نقطه‌ای دو بردار را توسط مؤلفه‌های دو بردار، معرفی می‌کند.

**مثال ۸-۱.** بردارهای  $a = 2\hat{i} - 3\hat{j}$  و  $b = \hat{i} + 2\hat{k}$  را در نظر بگیرید. مقدار عبارت  $a \cdot b$  را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطه (۱۳-۱) داریم:  $a \cdot b = (2)(1) + (-3)(0) + (0)(2) = 2$

**مثال ۹-۱.** زاویه میان دو بردار  $a = 3\hat{i} - 4\hat{j}$  و  $b = -2\hat{i} + 3\hat{k}$  را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم که ضرب نقطه‌ای دو بردار  $a$  و  $b$  با استفاده از رابطه (۱۳-۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$a \cdot b = (3)(-2) + (-4)(0) + (0)(3) = -6$$

همچنین ضرب نقطه‌ای این بردارها با استفاده از رابطه (۱۲-۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos\theta = (\sqrt{(3)^2 + (-4)^2})(\sqrt{(-2)^2 + (3)^2})\cos\theta =$$

$$= (5)(3.61)\cos\theta = 18.05\cos\theta$$

این دو مقدار به دست آمده برای ضرب نقطه‌ای، بردارهای و باید با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$-6 = 18.05\cos\theta$$

و یا نتیجه می‌شود:  $\cos\theta = \frac{-6}{18.05} = -0.33$  که این رابطه، به این معناست که:

$$\theta = \cos^{-1}(-0.33) = 109^\circ$$

### ۳-۷-۱. ضرب برداری (خارجی) دو بردار

اگر زاویه‌ای که دو بردار  $a$  و  $b$  می‌سازند را با  $\theta$  نمایش دهیم و بخواهیم حاصل ضرب برداری میان این دو

$$|a \times b| = |a| |b| \sin\theta \quad (۱۴-۱)$$

بردار را محاسبه کنیم، آن گاه:

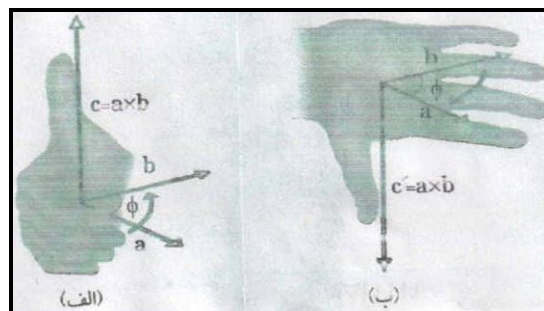
می‌باشد. البته قابل ذکر است که ضرب برداری دو بردار، یک بردار را نتیجه می‌دهد. اگر  $c = a \times b$

تعریف شود، آن گاه جهت بردار  $c$  عمود بر صفحه‌ای است که شامل بردارهای  $a$  و  $b$  می‌باشد (شکل ۱۲-۱).

چگونگی تعیین جهت بردار  $c$  را که معمولاً به قاعده دست راست موسوم است، نشان می‌دهند. در روش

قاعده دست راست، بردارهای  $a$  و  $b$  را از یک نقطه رسم می‌کنیم. اگر سوی چرخش انگشتان دست راست از

بردار  $a$  به سمت بردار  $b$  باشد، انگشت شست در جهت بردار  $c$  خواهد بود.



شکل ۱۲-۱. توضیح تصویری قاعده دست راست برای ضرب خارجی دو بردار. الف) چرخش بردار  $a$  به

سمت بردار  $b$  با انگشتان دست راست که انگشت شست، جهت بردار را نشان می‌دهد. ب) نمایش این که

بردار  $b \times a$  در جهت مخالف بردار  $a \times b$  می‌باشد.

خاطر نشان می‌شود که در ضرب برداری، ترتیب بردارها مهم می‌باشد، طوری که حاصل  $b \times a$ ، جهتی

در خلاف جهت بردار  $a \times b$  خواهد داشت. به عبارت دیگر، چون:

$$a \times b = - a \times b \quad (15-1)$$

می‌باشد، لذا قانون جابه‌جایی برای ضرب برداری برقرار نمی‌باشد.

از نظر بردارهای یکه و نمایش مؤلفه‌ای بردارها نیز، چون ضرب خارجی بردارهای یکه، به صورت:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = (1) \quad (1) \quad \sin 0 = 0$$

بوده و همچنین با کمی دقت و حوصله، پیداست که:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

بنابراین، به طور تحلیلی و به سادگی می‌توان نشان داد که حاصل ضرب برداری دو بردار و به صورت:

$$a \times b = \hat{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k} (a_x b_y - a_y b_x) \quad (16-1)$$

می‌باشد. اگر کمی در مورد ماتریس‌ها تحقیق کنیم، می‌توان دریافت که رابطه (16-1) را می‌توان به

صورت دترمینان ماتریس زیر تعریف نمود:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (17-1)$$

برای تحقیق این که آیا دستگاه مختصات  $xyz$ ، یک دستگاه راست گرد می‌باشد یا خیر، از قاعده دست

راست برای ضرب برداری  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$  در آن دستگاه استفاده کنید. اگر جهت پیش انگشتان دست شما از

بردار یکه  $\hat{i}$  (یعنی جهت مثبت محور  $x$ ها) به بردار یکه  $\hat{j}$  (یعنی جهت مثبت محور  $y$ ها) و در پی آن،

انگشت شست شما، سوی مثبت محور  $z$ ها (یعنی بردار یکه  $\hat{k}$ ) را نشان دهد، دستگاه مختصات مورد بحث،

راستگرد خواهد بود.

**مثال ۱۰-۱.** سه بردار  $a = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$  و  $b = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$  و نیز  $c = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  را در نظر بگیرید. مقادیر الف)  $a \cdot (b \times c)$  و ب)  $a \cdot (b + c)$  (و نیز ج)  $a \times (b + c)$  را محاسبه نمایید.

حل: الف) در این جا، ابتدا بردار  $b \times c$  را محاسبه می‌کنیم:

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$$

و سپس بردار  $a$  را در این بردار به دست آمده، ضرب نقطه‌ای می‌کنیم. بدین صورت که:

$$a \cdot (b \times c) = (3)(-8) + (3)(5) + (-2)(6) = -21$$

ب) برای حل این قسمت، ابتدا بردار  $b + c$  را محاسبه می‌کنیم:

$$b + c = (-1+2)\hat{i} + (-4+2)\hat{j} + (2+1)\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

و سپس ضرب داخلی بردار به دست آمده را با بردار  $a$  محاسبه می‌کنیم:

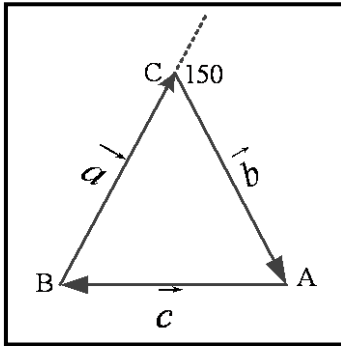
$$a \cdot (b + c) = (3)(1) + (3)(-2) + (-2)(3) = -9$$

ج) در این جا حاصل ضرب برداری بردار  $b + c$  که در بند ب محاسبه شده است را در بردار  $a$  به دست می آوریم:

$$a \times (b + c) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\hat{i} - 11\hat{j} - 9\hat{k}$$

### ۸-۱. نمونه مسائل حل شده

۱. زاویه میان بردارهای هم اندازه‌ی  $a$  و  $b$  برابر  $150^\circ$  می باشد. اگر  $a + b + c = 0$  باشد، زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  را محاسبه کنید.



حل: می دانیم که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر  $180^\circ$  می باشد. بنابراین در شکل مقابل، مجموع زاویه های  $A$  و  $B$  برابر  $150^\circ$  خواهد بود و چون زاویه  $C$  برابر  $30^\circ$  می باشد، با توجه به مساوی بودن زاویه های  $A$  و  $B$  (مثلث متساوی الساقین می باشد)، لذا زاویه  $A$  و  $B$  هر کدام برابر  $75^\circ$  می شوند.  
زاویه بین بردار  $c$  و  $b$  برابر زاویه خارجی  $A$  می باشد که برابر  $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$  می باشد.

۲. برآیند دو بردار عمود بر هم  $r$  و  $s$  برابر  $20$  واحد می باشد. اگر دو بردار، رابطه ای به صورت  $s = (3/4)r$  داشته باشند، اندازه هر کدام از بردارها را بیابید.

حل: چون دو بردار عمود بر هم می باشند، پس رابطه فیثاغورث در مورد آن ها صادق است. یعنی:

$$|r+s|^2 = |r|^2 + |s|^2$$

در این جا به جای بردار  $r$ ، مساوی آن یعنی  $s = (3/4)r$  را جاگذاری و به جای  $|r+s|$ ، اندازه بردار برآیند یعنی  $20$  واحد را جاگذاری می کنیم.

$$20^2 = |(3/4)s|^2 + |s|^2 = (9/16)|s|^2 + |s|^2 = (25/16)|s|^2 = |(5/4)s|^2$$

به عبارت دیگر با ساده سازی عبارات فوق، داریم:  $20 = (5/4)|s|$  و یا:  $|s| = 16$

$$|r| = (3/4)|s| = (3/4)(16) = 12$$

و لذا در مورد  $r$  داریم که:

۳. اگر مجموع دو بردار  $r = 3\hat{i} + a\hat{j}$  و  $s = b\hat{i} - \hat{j}$  برابر  $u = \hat{i} + \hat{j}$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را محاسبه کنید.

حل: چون  $u = r + s$  می باشد، پس: 
$$\begin{cases} 3+b=1 \\ a-1=1 \end{cases}$$
 و لذا نتیجه می شود:  $a = 2$  و  $b = -2$

۴. بردار  $c = 9\hat{i} + 12\hat{j}$  را به دو بردار تجزیه نمودیم، طوری که یکی از آن ها واقع در ربع اول و با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $45^\circ$  می سازد و دیگری به صورت  $b = 2\hat{i} + m\hat{j}$  می باشد. مقدار  $m$  چقدر است؟  
حل: کاملاً پیدا است که بردار  $c$ ، برآیند بردارهای  $a$  و  $b$  می باشد، یعنی  $c = a + b$ . اگر بردار  $a$  دارای بزرگی (اندازه)  $a$  باشد، چون با محور  $x$  ها، زاویه  $45^\circ$  می سازد، پس نمایش مؤلفه ای بردار  $a$  به صورت:

$$a = \hat{i}a\cos 45^\circ + \hat{j}a\sin 45^\circ = (\sqrt{2}/2)a\hat{i} + (\sqrt{2}/2)a\hat{j}$$

خواهد بود و لذا داریم:

$$9\hat{i} + 12\hat{j} = \left( (\sqrt{2}/2)a\hat{i} + (\sqrt{2}/2)a\hat{j} \right) + (2\hat{i} + m\hat{j})$$

$$= \left( (\sqrt{2}/2)a + 2 \right) \hat{i} + \left( (\sqrt{2}/2)a + 2 \right) \hat{j}$$

بنابراین باید  $\begin{cases} 9 = (\sqrt{2}/2)a + 2 \\ 12 = (\sqrt{2}/2)a + m \end{cases}$  که از رابطه بالایی  $a = 7\sqrt{2}$  به دست می‌آید و با جاگذاری این مقدار در رابطه پایینی داریم:

$$m = 5 \quad \text{و یا:} \quad 12 = (\sqrt{2}/2)(7\sqrt{2}) + m = 7 + m$$

۵. اگر  $\hat{i} - 3\hat{j}$  و  $a = \hat{i} - 3\hat{j}$  و  $b = 3\hat{i} - \hat{j}$  باشد، طول بردار  $r = a + b$  را محاسبه کنید.  
حل: ابتدا بردار  $r = a + b$  را محاسبه می‌کنیم، به این صورت که:

$$r = a + b = (1 + 3)\hat{i} + (-3 + (-1))\hat{j} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$$

و بنابراین، طول این بردار برابر است با:

$$|r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

۶. اگر  $d_1 + d_2 = 5d_3$  و نیز  $d_1 - d_2 = 3d_3$  و بالاخره،  $d_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$  باشد، الف) بردار  $d_1$  و ب) بردار  $d_2$  را محاسبه کنید.

حل: الف) اگر دو بردار  $d_1 + d_2$  و  $d_1 - d_2$  را با هم جمع کنیم، آن‌گاه:

$$(d_1 + d_2) + (d_1 - d_2) = 5d_3 + 3d_3 = 8d_3$$

طرف چپ رابطه فوق را ساده می‌کنیم و پس از جاگذاری مقدار بردار  $d_3$  در طرف راست، داریم:

$$2d_1 = 8d_3 = 8(2\hat{i} + 4\hat{j}) = 16\hat{i} + 32\hat{j}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که  $d_1 = 8\hat{i} + 16\hat{j}$  خواهد شد.

ب) مقدار  $d_1$  در بند الف محاسبه گردید، پس با استفاده از رابطه  $d_1 + d_2 = 5d_3$ ، خواهیم داشت:

$$(8\hat{i} + 16\hat{j}) + d_2 = 5(2\hat{i} + 4\hat{j}) \Rightarrow d_2 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

۷. بردارهای زیر را در نظر بگیرید و مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید:

$$a = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} \quad \text{و} \quad b = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{و} \quad c = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$3c \cdot (a - b) \quad \text{ب)} \quad 2a \cdot (b + c) \quad \text{الف)}$$

$$-2b \cdot (a \times b) \quad \text{د)} \quad a \times (b - 2c) \quad \text{ج)}$$

حل: الف) ابتدا بردار  $b + c$  را محاسبه می‌کنیم:

$$b + c = (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

و سپس این بردار را در  $2a$  ضرب می‌کنیم:

$$2a \cdot (b + c) = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 12 + 6 - 6 = 12$$

ب) در این قسمت نیز ابتدا  $a - b$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a - b = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

و سپس این بردار را در  $3c$  ضرب نقطه‌ای می‌کنیم:

$$3c \cdot (a - b) = 3(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) = 6 - 3 - 9 = -6$$

ج) ابتدا بردار  $b - 2c$  را محاسبه می‌کنیم:

$$b - 2c = (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) - 2(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = -3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$a \times (b - 2c) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 17\hat{k}$$

و سپس داریم:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$$

د) ابتدا بردار  $a \times b$  را محاسبه می‌کنیم:

و بنابراین خواهیم داشت:

$$-2b \cdot (a \times b) = -2(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (8\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}) = -16 + 20 - 4 = 0$$

## ۹-۱. مسائل تکمیلی

۱. مؤلفه  $x$  بردار  $a$  برابر  $25m$ - و مؤلفه  $y$  آن معادل  $40m$  می‌باشد. الف) بزرگی بردار  $a$  و ب) زاویه میان جهت بردار  $a$  و محور مثبت  $x$  ها چقدر است؟

۲. اگر بردار  $r$  در جهت  $250$  درجه پادساعتگرد نسبت به سوی مثبت محور  $x$  ها و دارای بزرگی  $7.2m$  باشد، الف) مؤلفه  $x$  و ب) مؤلفه  $y$  بردار  $r$  را در صفحه مختصاتی، محاسبه کنید.

۳. بردارهای  $a = 2\hat{i} - 3\hat{j}$  و  $b = \hat{i} + 2\hat{j}$  را در نظر بگیرید. بردارهای الف)  $a+b$  و ب)  $a-b$  (ج) اندازه بردارهای  $a$  و  $b$  و  $a+b$  و  $a-b$  را محاسبه نمایید.

۴. دو بردار  $a = a\hat{i}$  و  $b$  را در نظر بگیرید. اگر  $a+b$  بردار سومی باشد که به صورت  $3a\hat{j}$  تعریف شود و همچنین بزرگی بردار  $b$ ، معادل  $7$  باشد، بزرگی بردار  $a$  را محاسبه کنید.

۵. مؤلفه‌های متعامد برداری به بزرگی  $10$  واحد را که با محور افقی زاویه  $30^\circ$  می‌سازد را محاسبه کنید.

۶. دو بردار  $a$  و  $b$  که بزرگی یکسانی داشته و طول آن‌ها  $10m$  می‌باشند نیز زاویه‌های آن‌ها با محور  $x$  ها برابر  $\theta_a = 30^\circ$  و  $\theta_b = 105^\circ$  می‌باشند را در نظر بگیرید. مطلوب است، الف) مؤلفه  $x$  و ب) مؤلفه  $y$  بردار  $r = a+b$  (ج) بزرگی بردار  $r$  و د) جهتی که بردار  $r$  با محور  $x$  ها می‌سازد.

۷. دو بردار  $a = 3\hat{i} + 5\hat{j}$  و  $b = 2\hat{i} + 4\hat{j}$  داده شده‌اند. الف)  $a \times b$  و ب)  $a \cdot b$  و همچنین ج)  $(a+b) \cdot b$  را محاسبه نمایید.

۸. سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  را به صورت مقابل در نظر بگیرید:

$$c = 7\hat{i} - 8\hat{j} \quad \text{و} \quad b = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{و} \quad a = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

- حاصل عبارت الف)  $(2a \times b) \cdot 3c$  و ب)  $(a - b) \times 2c$  را محاسبه کنید.
۹. اگر بردارهای  $r = 2\hat{i} + b\hat{j}$  و  $s = b\hat{i} - 4\hat{j}$  و  $u = 3\hat{i} + 5\hat{j}$  با محور  $x$  ها زاویه  $\theta$  بسازد، طوری که  $\tan \theta = 1/4$  باشد، مقدار  $b$  را محاسبه کنید.
۱۰. اگر بردار سه بردار  $a = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$  و  $b = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$  و بردار  $c$  برابر صفر باشد، بردار  $c$  را محاسبه کنید.
۱۱. بردارهای  $a = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  و  $b = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  و  $c = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  را در نظر بگیرید، مطلوب است:
- الف) بزرگی بردار  $a \times b$  و ب) بردار  $a - (b \times c)$  و ج)  $(2a + b) \times c$ .



## مقدمه

مبدأ علم الکتریسیته، به مشاهدات بسیار قدیمی یونانیان بر می‌گردد. فیلسوفان یونانی با بررسی و تحقیق، مشاهده نمودند که اگر قطعه‌ای از کهربا را مالش داده و آن را به تکه‌های کاه نزدیک کنیم، کهربا خرده‌های کاه را می‌رباید. از سویی دیگر مبدأ علم مغناطیس، به مشاهده این واقعیت بر می‌گردد که بعضی از سنگ‌ها (یعنی سنگ‌های مگنتیت) به طور طبیعی، آهن را جذب می‌کنند.

علم الکتریسیته به موازات علم مغناطیس، تکامل می‌یافتند تا این که در اوایل قرن نوزدهم، دانشمندان رابطه‌ای بین الکتریسیته و مغناطیس یافتند، بدین صورت که جریان الکتریکی در یک سیم می‌تواند عقربه‌ی قطب‌نمای مغناطیسی را تحت تأثیر قرار دهد. بدین گونه بود که الکترومغناطیس به عنوان یک علم ارائه گردید و این علم تا آن‌جا پیشرفت نمود که امروزه، مبنای کار انواع وسایل الکتریکی و الکترونیکی می‌باشد.

یکی از دانشمندانی که در علم الکترومغناطیس تلاش‌های بسیار فراوانی داشته ماکسول<sup>۱</sup> می‌باشد که در این علم معادلات بسیار مهمی را ارائه نموده است. تلفیق الکتریسیته با مغناطیس - که معادلات ماکسول را به همراه داشت - توانست این نتیجه را برای دانشمندان به ارمغان بیاورد که نور، ماهیتی الکترومغناطیسی دارد و سرعت آن را می‌توان با اندازه‌گیری‌های صرفاً الکتریکی و مغناطیسی، تعیین نمود. پس بدین صورت، اپتیک نیز با الکتریسیته رابطه‌ی نزدیکی پیدا نمود.

در این فصل، ابتدا با بارهای الکتریکی آشنا می‌شویم و سپس در مورد تأثیر بارهای الکتریکی بر هم دیگر بحث می‌کنیم.

## ۲-۱. بار الکتریکی

ماهیت بار الکتریکی معمولاً در هوای خشک هنگامی که به درب دست می‌زنیم و جرقه‌ای را حس می‌کنیم یا هنگامی که پیراهن پشمی خود را از تن بیرون می‌آوریم، کاملاً مشهود است. حتی جرقه‌های حاصل از وجود بار الکتریکی را می‌توانیم بشنویم.

این موارد گفته شده و صدها نمونه‌ی دیگر، حاکی از آن است که بار الکتریکی در تمامی مواد و اجسام وجود دارد. به عبارت دیگر، می‌توان چنین ادعا نمود که هر جسمی، شامل تعداد بی شماری بارهای الکتریکی می‌باشند. پس بار الکتریکی، یک مشخصه ذاتی ذراتی است که یک جسم را می‌سازند.

<sup>۱</sup>. James Clerk Maxwell

ممکن است این شبهه به وجود آید که اگر اجسام، شامل بارهای الکتریکی هستند، چرا آثارشان همواره وجود ندارد و هرگاه شرایط ایجاد شود، آثار بارهای الکتریکی را مشاهده می‌کنیم. جواب این موضوع بسیار ساده است. هر جسم دارای مقادیر یکسانی از دو نوع بار الکتریکی می‌باشد که از لحاظ الکتریکی جسم را خنثی می‌کنند. این دو نوع بار الکتریکی توسط فرانکلین<sup>۱</sup> ( دانشمند آلمانی ) به عنوان بار الکتریکی مثبت و بار الکتریکی منفی، نام‌گذاری گردید. نکته‌ای دیگر این است که چرا ادعا می‌کنیم دو نوع بار الکتریکی وجود دارد؟ جواب این سؤال نیز ساده می‌باشد. اگر دو جسم مثل شیشه و ابریشم را به یکدیگر مالش دهیم، خنثی بودن الکتریکی آن‌ها را به هم خواهیم زد و مقدار بسیار کمی بار الکتریکی از یکی به دیگری منتقل می‌شود، طوری که شیشه، بار الکتریکی مثبت و ابریشم، بار الکتریکی منفی خواهد گرفت.

لازم به ذکر است که بارهای الکتریکی برهم دیگر تأثیر می‌گذارند، طوری که بارهای الکتریکی همنام، هم دیگر را دفع و بارهای الکتریکی ناهمنام، هم دیگر را جذب می‌کنند. این واقعیت را می‌توان با این آزمایش تحقیق نمود: اگر یک میله‌ی شیشه‌ای را که با یک نخ آویزان نمودیم با یک تکه پارچه‌ی ابریشمی مالش دهیم و پس از آن یک میله‌ی شیشه‌ای دیگر را که با پارچه‌ی ابریشمی مالش دادیم به این میله‌ی آویزان نزدیک کنیم، این دو میله‌ی شیشه‌ای، هم دیگر را دفع می‌کنند. حال اگر میله‌ای پلاستیکی که با پارچه‌ی پشمی مالش داده‌ایم را به میله‌ی شیشه‌ای آویزان نزدیک کنیم، این دو میله هم دیگر را می‌ربایند.

واحد اندازه‌گیری بار الکتریکی، کولن نام دارد و با نماد  $C$  نشان داده می‌شود. مقدار یک کولن بار الکتریکی را در بخش‌های بعدی این فصل بحث می‌کنیم، ولی در این جا ذکر می‌کنیم که اندازه‌ی بار الکتریکی یک الکترون که بار منفی دارد برابر با  $-1.6 \times 10^{-19} C$  می‌باشد و آن را با  $-e$  نمایش می‌دهند. هم‌چنین بار الکتریکی یک پروتون را مساوی با بار الکتریکی یک الکترون و فقط مقدار آن را مثبت در نظر می‌گیرند. بنابراین بار الکتریکی یک پروتون را با  $+e$  نمایش می‌دهند.

روشن است که اگر به جسمی تعداد  $n$  الکترون داده شود، بار الکتریکی جسم برابر با  $q = -ne$  و یا اگر تعداد  $n$  الکترون از جسمی گرفته شود، بار الکتریکی جسم برابر  $q = +ne$  خواهد بود.

**مثال ۱-۲.** اگر بار الکتریکی هر الکترون  $-1.6 \times 10^{-19} C$  باشد برای یک کولن الکتریسته چند الکترون باید جا بجا شود؟

حل: چون  $q = -ne$  می‌باشد بنابراین:

$$1C = -ne = -n(-1.6 \times 10^{-19} C)$$

$$n = 6.25 \times 10^{18} \text{ و یا}$$

اشاره شد که برای باردار کردن اجسام باید همواره تعدادی الکترون به جسم بدهیم و یا از آن بگیریم. توجه داشته باشید که در این مبادله‌ی الکترون، هیچ‌گاه الکترون تولید نمی‌شود و یا از بین هم نمی‌رود، بلکه تنها از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شود. با توجه به این که هر الکترون دارای مقدار معینی بار الکتریکی است می‌توان گفت: « بار الکتریکی به وجود نمی‌آید و از بین هم نمی‌رود و فقط از یک جسم به جسم دیگر منتقل می‌شود. » این بیان را « پایستگی بار الکتریکی » می‌نامیم.

<sup>1</sup>. Benjamin Franklin

## ۲-۲. رساناها و نارساناها

هرگاه یک میله فلزی را با پوست خز مالش دهیم به نظر می‌رسد که در میله، بار الکتریکی به وجود نخواهد آمد، ولی اگر میله فلزی را با یک دسته پلاستیکی بگیریم سعی کنیم در هنگام مالش دادن، میله فلزی با دست تماس پیدا نکند، می‌توانیم میله فلزی را باردار کنیم. علت این امر، این است که بعضی از مواد مثل میله فلزی توانایی حرکت دادن بار الکتریکی را در خود دارند و بعضی دیگر از مواد مثل پلاستیک این توان را ندارند. بر حسب قابلیت حرکت بارهای الکتریکی در اجسام، می‌توان آن‌ها را به دو دسته تقسیم‌بندی نمود:

دسته اول، موادی که بار الکتریکی در آن‌ها می‌تواند نسبتاً به آزادی حرکت کند. این مواد رسانا<sup>۱</sup> یا هادی نامیده می‌شود. فلزات بدن انسان و الکترولیت‌ها، نمونه‌هایی از رساناها می‌باشند.

دسته دوم، موادی هستند که در آن‌ها، بار الکتریکی توانایی حرکت آزاد و جابه‌جا شدن را ندارند. این مواد نارسانا<sup>۲</sup> یا عایق خوانده می‌شوند. لاستیک، چوب و آب خالص نمونه‌هایی از مواد عایق می‌باشند. لازم است بدانیم موادی هم وجود دارند که از لحاظ رسانندگی حالتی بین رساناها و عایق‌ها می‌باشند. عناصری مثل سیلیسیم و ژرمانیوم از این مواد می‌باشند. به این گروه از مواد، «نیم‌رسانا<sup>۳</sup>» یا «نیمه‌هادی» گفته می‌شود. نیم رساناها در ساخت ادوات الکترونیکی مثل ترانزیستورها و تراشه‌های الکترونیکی کاربرد دارند. البته «ابررساناها<sup>۴</sup>» نیز موادی هستند که رسانایی آن‌ها بسیار بالاست و بارهای الکتریکی به سادگی در این مواد حرکت می‌کنند. یک آزمایش بسیار دقیق به نام اثر هال (که در بخش ۱۰-۵ در مورد آن بحث می‌شود) نشان می‌دهد که در فلزات، فقط بار منفی است که آزادانه حرکت می‌کند. بار الکتریکی مثبت در موادی مثل شیشه و پلاستیک، بدون حرکت می‌باشد. در واقع حامل‌های بار الکتریکی در فلزات و اکثر مواد دیگر، الکترون‌های آزاد می‌باشند. در تشکیل یک ماده رسانای جامد، الکترون‌های لایه‌ی خارجی‌اتم، آزادانه در سرتاسر حجم جسم جامد حرکت می‌کند.

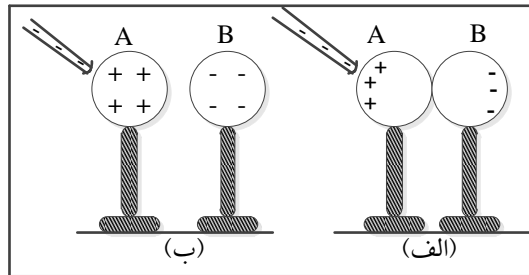
حال می‌خواهیم تحقیق کنیم چگونه می‌توان اجسام رسانا را باردار نمود. برای باردار کردن اجسام رسانا به وسیله یک جسم باردار، از روش القا استفاده می‌شود. برای آشنایی با این روش، آزمایشی را انجام می‌دهیم. دو کره‌ی فلزی را که روی پایه‌های نارسانا (عایق) قرار دارند (شکل ۲-۱ الف)، در تماس با هم قرار داده و یک تیغه پلاستیکی باردار را به کره‌ی A نزدیک می‌کنیم. در این حالت، الکترون‌های آزاد روی کره‌ی A و B توسط الکترون‌های اضافی میله دفع شده و در قسمت راست کره‌ی B که از میله دورتر است جمع می‌شوند. به این ترتیب، کره‌ی B بار منفی و کره‌ی A بار مثبت می‌گیرد.

<sup>1</sup>. Conductor

<sup>2</sup>. Insulator

<sup>3</sup>. Semiconductor

<sup>4</sup>. Superconductor



شکل ۱-۲. باردار کردن رسانا

حال دو کره را از همدیگر فاصله می‌دهیم و سپس میله را از کره A دور می‌کنیم (شکل ۱-۲-ب) در این صورت، کره‌های مشابه A و B بارهای مساوی هم ولی مخالف هم خواهند داشت. اکنون اگر مثلاً با یک سیم، کره B را به زمین وصل کنیم، زمین به عنوان یک گیرنده‌ی الکترون، تمام الکترون‌های اضافی کره B را به خود منتقل می‌کند. همچنین اگر کره A را به زمین وصل کنیم، الکترون‌های زمین می‌توانند کره A را بی‌بار کنند. پس زمین، هم یک گیرنده الکترون محسوب می‌شود و هم یک چشمه بزرگ دهنده‌ی الکترون.

**مثال ۲-۲. الف)** دو کره‌ی مشابه دارای بار الکتریکی  $q_1 = +6e$  و  $q_2 = -4e$  است. اگر این دو کره را با هم تماس دهیم بار هر کدام چقدر خواهد شد؟ (ب) اگر  $q_1 = +2e$  و  $q_2 = +4e$  باشد چطور؟

حل: الف) در این حالت بار الکتریکی کل دو کره برابر با:  $q = q_1 + q_2 = (+6e) + (-4e) = 2e$

خواهد بود و لذا بار روی هر کدام از کره‌ها معادل  $q = +1e$  خواهد شد.

ب) در این حالت نیز داریم:  $q = q_1 + q_2 = (+4e) + (+2e) = +6e$

بوده و لذا بار روی هر کدام از کره‌ها معادل  $q = +3e$  خواهد شد.

### ۲-۳. قانون کولن

اشاره گردید که دو جسم باردار، اگر در فاصله‌ی معقولی از هم دیگر قرار داشته باشند، همدیگر را جذب یا دفع می‌نمایند (به عبارت دیگر برهم دیگر نیرو وارد می‌کنند). حال اگر جنس بارهای الکتریکی اجسام یکسان باشد، این نیرو دافعه است و اگر جنس بارهای الکتریکی دو جسم مخالف هم باشند، این نیرو جاذبه خواهد بود. در هر حال این نیرو چه جاذبه باشد و چه دافعه «نیروی الکتروستاتیکی» خوانده می‌شود. رابطه‌ای که نیروی الکتروستاتیکی را برای ذرات باردار معین می‌کند، توسط دانشمندی به نام کولن<sup>۴</sup> معرفی شد و به افتخار ایشان، این رابطه به «قانون کولن» معروف گردید.

کولن، آزمایشی ترتیب داد و در آن آزمایش، به نتایجی دست یافت. اولین نتیجه‌ی تجربی کولن بدین-صورت بود که نیروی الکتروستاتیکی بین دو بار الکتریکی با عکس مجذور فاصله‌ی دو بار، رابطه دارد. نتیجه‌ی دیگر آزمایش کولن این بود که نیروی الکتروستاتیکی میان بارهای الکتریکی، به اندازه (بزرگی) بارها نیز

<sup>۴</sup> Charles Augustin Coulomb

بستگی داشت و با حاصل ضرب آن‌ها متناسب بود. اگرچه کولن، این مطالب را ثابت نکرد ولی به طور ضمنی به آن‌ها اشاره نمود. بنابراین در مورد دو بار الکتریکی  $q_1$  و  $q_2$  که به فاصله  $r$  از هم دیگر قرار داشته باشند، می‌توان گفت که نیروی الکتروستاتیکی بین آن‌ها با  $q_1q_2/r^2$  متناسب خواهد بود. ضریب تناسب در این رابطه به صورت  $K = 8.89 \times 10^9$  معرفی می‌شود که این عدد، « ثابت کولن » یا « ثابت الکتروستاتیکی » خوانده می‌شود. بنابراین قانون کولن به این صورت درمی‌آید:

$$F = K \frac{q_1q_2}{r^2} \quad (1-2)$$

راستای نیروی الکتروستاتیکی در امتداد خط واصل دو بار الکتریکی می‌باشد و جهت آن نیز اگر نیرو جاذبه باشد به سوی همدیگر و اگر نیرو دافعه باشد در جهت عکس خواهد بود.

در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) که واحد بار الکتریکی کولن (با علامت اختصاری C) می‌باشد واحد کمیت « ثابت الکتروستاتیکی » به صورت  $\frac{N.m^2}{C^2}$  خواهد بود. البته در بسیاری از کتب علمی، ثابت  $K$  به

$$\text{صورت } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ معرفی می‌شود که در آن، کمیت } \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2} \text{ به عنوان ثابت}$$

گذردهی خلأ می‌باشد. مقادیر  $K$  و  $\epsilon_0$  عددهای ثابت می‌باشند. رابطه (۱-۲) که به قانون کولن معروف است فقط در اجسام بارداری که اندازه‌ی آن‌ها خیلی کوچک‌تر از فاصله‌ی میان آن‌هاست صدق می‌کند. به عبارت دیگر، این قانون برای بارهای نقطه‌ای صادق است.

بد نیست بدانید که تاکنون هیچ استثنایی برای نیروی الکتروستاتیکی و قانون کولن یافت نشده است و علیرغم این که مکانیک کلاسیک نیوتن در حیطه‌ی اتمی شکست می‌خورد و باید از فیزیک کوانتومی به جای آن استفاده کرد، ولی قانون کولن حتی در ابعاد اتمی نیز برقرار می‌باشد و قادر به توجیه نیروهای موجود بین هسته‌ها و یا بین الکترون با هسته‌های باردار می‌باشد.

**مثال ۳-۲.** دو ذره با بار الکتریکی  $4 \times 10^{-16} C$  و  $-3 \times 10^{-16} C$  که به فاصله  $10cm$  از هم قرار دارند، چه نیرویی برهم وارد می‌کنند؟ (اندازه و نوع نیرو را بیان کنید.)

$$\text{حل: با استفاده از رابطه (۱-۲) داریم: } r = 10cm = 0.1m \quad \text{و} \quad F = K \frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$\text{و لذا: } F = \frac{(8.85 \times 10^9 N.m^2 / C^2)(4 \times 10^{-16} C)(-3 \times 10^{-16} C)}{(0.1m)^2} = -10.65 \times 10^{-19} N$$

و چون بارهای الکتریکی غیر هم نام می‌باشند لذا نیروی فوق جاذبه می‌باشد.

**مثال ۴-۲.** دو ذره با بارهای الکتریکی  $4 \mu C$  و  $8 \mu C$  از فاصله  $4cm$  بر یک دیگر چند نیوتن نیرو وارد می‌کنند؟ نوع این نیرو رانشی است یا ربایشی؟

حل: ابتدا بارها و فاصله‌ی بین آن‌ها را به صورت استاندارد در می‌آوریم:

$$q_1 = 4 \mu C = 4 \times 10^{-6} C \quad q_2 = 8 \mu C = 8 \times 10^{-6} C \quad r = 4cm = 0.04m$$

و سپس مقادیر را در رابطه (۱-۲) جاگذاری می‌کنیم:

$$F = \frac{(8.85 \times 10^9 N.m^2 / C^2)(4 \times 10^{-6} C)(8 \times 10^{-6} C)}{(0.04m)^2} = 178 N$$

و چون بارهای الکتریکی هم نام می‌باشند پس این نیرو رانشی خواهد بود.

اشاره نمودیم که واحد بار الکتریکی کولن است، ولی مقدار یک کولن بار الکتریکی را معرفی نکردیم. کولن که واحد بار الکتریکی است، از یکای جریان الکتریکی (آمپر) به دست می آید. می دانیم در صورتی که دو سر یک سیم را به قطب های یک باتری وصل کنیم، جریان الکتریکی  $i$  در سیم برقرار می شود. این جریان الکتریکی را می توان به صورت شارش بار الکتریکی تجسم نمود. پس می توان گفت: « اگر در یک سیم، جریان پایای یک آمپر برقرار باشد، یک کولن مقدار باری است که در مدت زمان یک ثانیه از هر مقطع سیم، شارش پیدا می کند. » بنا به تعریف، رابطه ی میان بار الکتریکی که در مدت زمان  $t$  ثانیه توسط جریان الکتریکی  $i$  جابه جا می شود، چنین خواهد بود:

$$q = it \quad (2-2)$$

که در آن چون  $t$  بر حسب ثانیه و  $i$  بر حسب آمپر (A) می باشد، بنابراین  $q$  بر حسب کولن خواهد بود.

**مثال ۵-۲.** در یک آذرخش، جریانی معادل  $2.5 \times 10^4 A$  در مدت  $20 \mu s$  به وجود آمده است. در این پدیده چقدر بار الکتریکی جابه جا شده است؟

حل: بر اساس رابطه (۲-۲) می توان گفت که:  $q = it = (2.5 \times 10^4 A)(20 \times 10^{-6} s) = 0.5 C$

اگر بیش از دو بار الکتریکی داشته باشیم نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره، برآیند نیروهایی است که هر

یک از بارهای الکتریکی دیگر بر آن ذره وارد می کنند. به عبارت دیگر، نیروی وارد شده بر بار الکتریکی  $q_1$

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + \dots \quad (3-2)$$

از طرف سایر بارهای الکتریکی عبارتند از: که در آن  $F_{12}$  نیرویی است که از طرف بار الکتریکی  $q_2$  بر بار الکتریکی  $q_1$  وارد می شود.

**مثال ۶-۲.** در شکل (۲-۲) اگر  $q_1 = 20 \mu C$  و  $q_2 = 5 \mu C$  باشد نقطه  $M$  در چه فاصله ای از بار الکتریکی  $q_2$  باید قرار گیرد تا برآیند نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای دیگر صفر باشد؟

حل: اگر بار الکتریکی  $q_3$  را در نقطه  $M$  قرار دهیم آن گاه بار الکتریکی  $q_1$  در فاصله  $1m$  و بار الکتریکی  $q_2$  در فاصله  $x$  از آن قرار می گیرد و نیروی رانشی از طرف  $q_1$  برابر با نیروی رانشی از طرف بار الکتریکی  $q_2$  خواهد بود. لذا:

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow K \frac{q_1 q_3}{r_1^2} = K \frac{q_2 q_3}{r_2^2} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{5}{x^2}$$

که با ساده کردن، مقدار  $x$  برابر با  $x = 0.5m = 50cm$  به دست خواهد آمد.

## ۲-۴. بار الکتریکی کوانتیده است

دانشمندان با آزمایش های فراوان دریافته اند که بار الکتریکی در طبیعت همیشه مضرب صحیحی از فقط یک بار الکتریکی است. این بار واحد را با  $e$  نمایش می دهیم که همان بار الکترون است. یعنی بار الکتریکی تمامی ذرات باردار دقیقاً با مضرب صحیحی از بار الکترون برابری می کند. مثلاً بار یک پروتون درست برابر با منفی بار الکترون و بار پوزیترون دقیقاً برابر با بار الکتریکی یک الکترون است.

در فیزیک هر گاه یک خاصیت فیزیکی مثل بار الکتریکی به جای داشتن مقادیر پیوسته به صورت بسته‌های گسسته باشد آن خاصیت را «کوانتیده» می‌گویند. بنابراین بار الکتریکی که به صورت مضرب‌های صحیحی از  $e$  اندازه‌گیری می‌شود را کوانتیده و بار الکتریکی ( $e$ ) را کوانتای بار الکتریکی می‌خوانند. می‌توان با یک آزمایش ساده ثابت نمود که اتم یا مولکول هیدروژن که از یک پروتون و یک الکترون تشکیل شده است، از لحاظ الکتریکی خنثی است. مثلاً اگر باریکه‌ای از اتم‌های هیدروژن را در یک میدان الکتریکی قوی که در فضای خلأ ایجاد شده است عبور دهیم، هیچ انحرافی را در مسیر انتهای هیدروژن مشاهده نمی‌کنیم. این نتیجه به این معناست که اتم هیدروژن از لحاظ الکتریکی خنثی است. (بار الکترون و پروتون همدیگر را خنثی می‌کنند) کوانتومی بودن بار الکتریکی در حیطه عمل نظریه الکترومغناطیس کلاسیک نمی‌باشد. ما نیز آن را در نظر نمی‌گیریم و فرض می‌کنیم بار نقطه‌ای  $q$  می‌تواند هر تعدادی را داشته باشد.

## ۵ - ۲. نمونه مسائل حل شده

۱. اگر شدت جریان الکتریکی در مداری  $3.2mA$  باشد، در مدت زمان ۳ ثانیه در هر مقطع از مدار چند الکترون می‌گذرد؟

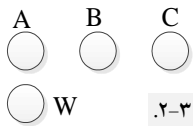
حل: ابتدا مقدار باری که در این مدت از مقطع سیم می‌گذرد را محاسبه می‌کنیم:

$$q = it = (3.2 \times 10^{-3} A)(3s) = 9.6 \times 10^{-3} C$$

و لذا این مقدار بار الکتریکی باید در رابطه  $q = -ne$  صدق کند. لذا:

$$q = 9.6 \times 10^{-3} C = -n(-1.6 \times 10^{-19} C) \Rightarrow n = 6 \times 10^{16}$$

۲. شکل (۲-۳) چهار کره‌ی رسانای مشابه را نشان می‌دهد که در واقع به حد کافی از هم فاصله دارند. کره‌ی  $W$  بدون بار بوده و آن را به کره‌ی  $A$  تماس می‌دهیم و سپس آن را جدا و به کره‌ی  $B$  که بار اولیه آن  $-32e$  است تماس می‌دهیم و سپس آن را جدا می‌کنیم. بالاخره کره‌ی  $W$  را به کره‌ی  $C$  با بار اولیه  $+48e$  تماس می‌دهیم. اگر بار نهایی روی کره‌ی  $W$  برابر  $+18e$  باشد بار روی کره‌ی  $A$  چقدر است؟



شکل ۲-۳

مثال ۲

حل: اگر بار الکتریکی روی کره‌ی  $A$  برابر  $q$  باشد، وقتی کره‌ی  $W$  را با کره‌ی  $A$  تماس می‌دهیم، بار روی کره‌های  $A$  و  $W$  معادل  $q/2$  می‌شود. حال اگر کره‌ی  $W$  با بار  $q/2$  را به کره‌ی  $B$  با بار  $-32e$  تماس دهیم بار هر کدام از کره‌های  $B$  و  $W$  معادل  $\frac{(q/2) - 32e}{2}$  می‌شود و وقتی این کره را با کره‌ی  $C$  با بار الکتریکی  $+48e$  تماس دهیم، بار روی کره‌های  $C$  و  $W$  برابر با:  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(q/2) - 32e}{2} + 48e \right]$  خواهد بود که این مقدار (بنا به صورت مسئله) باید معادل  $18e$  باشد، پس:

$$18e = \frac{1}{2} \left[ \frac{(q/2) - 32e}{2} + 48e \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{q}{4} + 32e \right]$$

و لذا  $q = +16e$  به دست می‌آید.

۳. نیروی الکتروستاتیکی میان دو یون مشابه که به فاصله‌ی  $5 \times 10^{-10} m$  از هم قرار دارند برابر  $3.7 \times 10^{-9} N$  است. الف) بار هر یون چقدر است؟ ب) هر یون چند الکترون از دست داده است؟ حل: الف) اگر بار هر کدام از یون‌ها را برابر  $q$  بدانیم، آنگاه:

$$3.7 \times 10^{-9} N = \frac{(8.85 \times 10^9 N.m^2 / C^2) q^2}{(5 \times 10^{-10} m)^2} \Rightarrow q^2 = 10.39 \times 10^{-36}$$

و لذا مقدار  $q$  که بار هر یون می باشد برابر خواهد بود با:  $q = 3.2 \times 10^{-19} C$

(ب) این میزان بار الکتریکی برابر با تعداد:  $n = \frac{q}{e} = \frac{3.2 \times 10^{-19} C}{1.6 \times 10^{-19} C} = 2$  الکترون بار الکتریکی می باشد.

۴. فاصله ی میان دو پروتون چقدر باشد تا نیروی دافعه ی الکتریکی وارد بر هر کدام، با نیروی وزن آن در سطح زمین برابر باشد. جرم پروتون  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} Kg$  می باشد.

حل: نیروی الکتروستاتیکی میان دو پروتون برابر است با:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{(8.85 \times 10^9 N.m^2 / C^2)(1.6 \times 10^{-19} C)(1.6 \times 10^{-19} C)}{r^2} = \frac{22.78 \times 10^{-29}}{r^2}$$

این نیرو باید با نیروی وزن پروتون برابر باشد. نیروی وزن پروتون برابر است با:

$$W = m_p g = (1.7 \times 10^{-27} kg)(9.8 m/s^2) = 16.66 \times 10^{-27} N$$

$$16.66 \times 10^{-27} N = \frac{22.78 \times 10^{-29}}{r^2} \quad \text{و لذا داریم:}$$

$$r = 0.117 m = 11.7 cm \quad \text{و از آنجا داریم که: } r^2 = 1.4 \times 10^{-2}$$

۵. از بار الکتریکی معین  $Q$  مقدار  $q$  را کم می کنیم و این دو بار الکتریکی را در فاصله معینی قرار می دهیم. اگر نیروی دافعه کولنی میان این دو بار الکتریکی بخواهد بیشینه باشد، مقدار  $Q$  و  $q$  چقدر باید باشد؟

حل: اگر مقدار  $q$  را از بار الکتریکی  $Q$  برداریم، بنابراین بارهای الکتریکی، به ترتیب  $q$  و  $Q - q$  خواهند شد. بنابراین نیروی دافعه الکتروستاتیکی میان این دو بار الکتریکی برابر است با:

$$F = K \frac{q(Q - q)}{r^2} \quad (\text{فاصله دو بار الکتریکی را } r \text{ در نظر گرفتیم})$$

برای اینکه این نیرو بیشینه شود باید  $dF/dq = 0$  باشد. لذا:

$$\frac{dF}{dq} = K \frac{(Q - q)}{r^2} + K \frac{q}{r^2} (-1) = K \frac{(Q - 2q)}{r^2} = 0$$

یعنی باید  $Q - 2q = 0$  باشد که  $q = Q/2$  خواهد شد.

۶. دو بار الکتریکی  $q_1$  و  $q_2$  در فاصله  $40 cm$  بر همدیگر نیروی  $27 N$  وارد می کنند. آن ها را چند سانتیمتر از هم دور کنیم تا بر هم دیگر نیروی  $12 N$  وارد کنند؟

حل: اگر اندازه دو بار الکتریکی را  $q_1$  و  $q_2$  در نظر بگیریم، در مرحله اول داریم:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \text{و یا} \quad K q_1 q_2 = F r^2 = (27 N)(0.4 m)^2 = 4.32 Nm^2$$

و در مرحله دوم اگر فاصله دو بار الکتریکی را با  $d$  نشان دهیم آنگاه:

$$12 N = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \Rightarrow d^2 = \frac{K q_1 q_2}{12} = \frac{4.32 Nm^2}{12 N} = 0.36 m^2$$

یعنی  $d = 0.6 m = 60 cm$  خواهد بود و چون در مرحله اول، فاصله برابر با  $40 cm$  بوده است، پس این

دو بار الکتریکی باید  $20 cm$  از هم دیگر دور شوند.

۷. اگر دو بار الکتریکی  $q_1$  و  $q_2$  در فاصله  $d$  به یک دیگر نیروی الکتروستاتیکی  $F$  وارد کنند، بارهای  $-3q_1$  و  $6q_2$  در فاصله  $2d$  چه نیرویی بر هم دیگر وارد می کنند؟



حل: می‌دانیم که در مرحله اول  $F = K \frac{q_1 q_2}{d^2}$  خواهد بود. در مرحله دوم نیز چنین داریم:

$$F_2 = K \frac{(-3q_1)(6q_2)}{(2d)^2} = K \frac{-18q_1 q_2}{4d^2} = -\frac{9}{2} K \frac{q_1 q_2}{d^2} = -\frac{9}{2} F$$

یعنی در مرحله دوم، نیرو 4.5 برابر ولی جهت آن عکس شده است. در مرحله اول نیرو دافعه و در مرحله دوم نیرو جاذبه خواهد بود.

۸. نیرویی که دو بار نقطه‌ای  $+q$  در فاصله  $r$  به یکدیگر وارد می‌سازند برابر  $500N$  است. اگر ۲۰ درصد از یکی از بارها را کم و آن را به دیگری اضافه کنیم، نیروی جدید در همان فاصله‌ی قبلی، چند نیوتن خواهد شد؟

حل: در مرحله اول  $F_1 = K \frac{q_1 q_2}{r^2} = K \frac{q^2}{r^2} = 500N$  می‌باشد. در مرحله دوم که بار الکتریکی اول ۲۰ درصد کاهش می‌یابد و به  $(4/5)q$  می‌رسد و بار الکتریکی دوم ۲۰ درصد افزایش یافته و به  $(6/5)q$  می‌رسد، آنگاه:

$$F_2 = K \frac{[(4/5)q][(6/5)q]}{r^2} = K \frac{(24/25)q^2}{r^2} = \frac{24}{25} F_1 = \frac{24}{25} (500N) = 480N$$

۹. اگر در شکل (۴-۲) برآیند نیروهای وارد بر بار الکتریکی  $4q$  برابر با صفر باشد بار  $Q$  بر حسب بار  $q$  چقدر می‌باشد؟



شکل ۴-۲: مثال ۹

حل: نیروهای وارد بر بار  $4q$  از طرف بار  $Q$  و هم دیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین:

$$K \frac{q(4q)}{(2d)^2} = K \frac{q(4q)}{d^2} \Rightarrow \frac{q}{4d^2} = \frac{Q}{d^2}$$

و این، یعنی این که:  $Q = \frac{q}{4}$  می‌باشد.

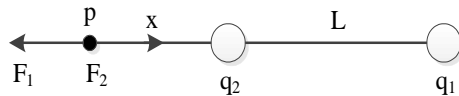
۱۰. دو بار الکتریکی  $q_1 = 8q$  و  $q_2 = -2q$  را در فاصله  $L$  از هم دیگر در نظر بگیرید. در چه فاصله‌ای از این دو ذره، یک پروتون می‌تواند در حالت تعادل باشد؟

حل: یک پروتون در صورتی می‌تواند در حالت تعادل باشد که هیچ نیرویی بر آن وارد نشود و یا برآیند

$$K \frac{q_1 q_p}{r^2} = K \frac{q_2 q_p}{r^2}$$

نیروهای وارد بر آن صفر باشد، یعنی در این مسئله می‌بایست داشته باشیم:

$$\frac{8q}{(L+x)^2} = \frac{2q}{x^2} \Rightarrow \frac{2}{L+x} = \frac{1}{x}$$

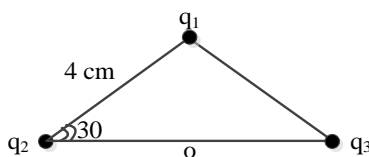


بنابراین که نتیجه می‌شود:  $x = L$

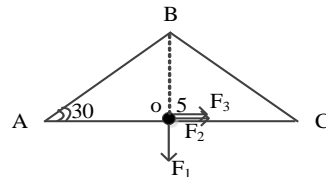
۱۱. سه بار نقطه‌ای  $q_1 = +4\mu C$  و  $q_2 = +6\mu C$  و  $q_3 = -6\mu C$  در سه رأس یک مثلث همانند شکل (۵-۲) ثابت شده است. نیروی وارد بر بار  $q_4 = 1\mu C$  واقع در نقطه  $O$  چند نیوتن است؟

حل: به نظر می‌رسد ابتدا باید فاصله بارهای  $q_1$  و  $q_2$  و  $q_3$  را تا محل بار  $q_4$  یعنی نقطه  $O$  محاسبه کنیم.

با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه  $OAB$ ، چون زاویه  $A$  برابر با  $30^\circ$  می‌باشد، بنابراین:



شکل ۵-۲: مثال ۱۱



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|OB|}{|AB|} = \frac{|OB|}{4} \Rightarrow |OB| = 2\text{cm} = 0.02\text{m}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA|}{4} \Rightarrow |OA| = 2\sqrt{3}\text{cm} = 0.02\sqrt{3}\text{m}$$

حال اگر نیروی وارد بر بار  $q_4$  از طرف بارهای  $q_1$  و  $q_2$  و  $q_3$  را به ترتیب  $F_1$  و  $F_2$  و  $F_3$  بنامیم:

$$F_1 = K \frac{q_1 q_4}{(OB)^2} = (8.85 \times 10^9 \text{ N.m}^2 / \text{C}^2) \frac{(4 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.02\text{m})^2} = 90 \text{ N}$$

$$F_2 = K \frac{q_2 q_4}{(OA)^2} = (8.85 \times 10^9 \text{ N.m}^2 / \text{C}^2) \frac{(6 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.02\sqrt{3}\text{m})^2} = 45 \text{ N}$$

$$F_3 = K \frac{q_3 q_4}{(OC)^2} = (8.85 \times 10^9 \text{ N.m}^2 / \text{C}^2) \frac{(-6 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.02\sqrt{3}\text{m})^2} = -45 \text{ N}$$

نیروهای  $F_2$  و  $F_3$  در جهت هم می‌باشند و با هم جمع می‌شوند:

$$F_{23} = F_2 + F_3 = (45 \text{ N}) + (45 \text{ N}) = 90 \text{ N}$$

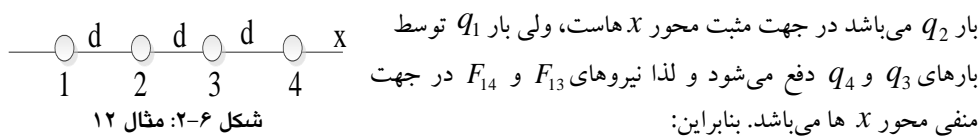
نیروی کلی، برآیند نیروهای  $F_1$  با  $F_{23}$  می‌باشد که با هم زاویه  $90^\circ$  می‌سازند. پس:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_{23}^2} = \sqrt{(90 \text{ N})^2 + (90 \text{ N})^2} = 90\sqrt{2} \text{ N}$$

این نیروی برآیند، زاویه  $45^\circ$  با هر کدام از نیروهای  $F_1$  و  $F_{23}$  می‌سازد زیرا اندازه نیروهای  $F_1$  و  $F_{23}$  با هم برابر بوده است.

۱۲. در شکل (۶-۲) چهار ذره روی محور  $x$  با فاصله  $d = 2\text{cm}$  ثابت شده‌اند. بار الکتریکی ذره‌ها به صورت  $q_4 = +4e$  و  $q_3 = +e$ ،  $q_2 = -e$ ،  $q_1 = +2e$  می‌باشد. نیروی الکتروستاتیکی خالص بر بار الف ( $q_1$ ) و ب ( $q_2$ ) از طرف بارهای دیگر را بر حسب نمادگذاری بردارهای یکه، بیان کنید.

حل: چون  $q_1$  به سمت  $q_2$  جذب می‌شود پس نیروی  $F_{12}$  که نیروی وارد بر بار الکتریکی  $q_1$  از طرف



$$F = F_1 - F_{13} - F_{14}$$

$$F = K \frac{(2e)(e)}{d^2} - K \frac{(2e)(e)}{(2d)^2} - K \frac{(2e)(4e)}{(3d)^2} = K \frac{e^2}{d^2} \left[ 2 - \frac{1}{2} - \frac{8}{9} \right]$$

$$= (8.85 \times 10^{-19} \text{ N.m}^2 / \text{C}^2) \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(0.02)^2} \left[ \frac{11}{18} \right] = 3.49 \times 10^{-25} \text{ N}$$

که در نمادگذاری بردارهای یکه، این نیرو به صورت  $F = 3.49 \times 10^{-25} \hat{i}$  خواهد شد.

ب) نیروی خالص وارد بر ذره  $q_2$  به صورت  $F_{21}$  و  $F_{23}$  و  $F_{24}$  می‌باشد که:

$$F_2 = F_{23} + F_{24} - F_{21} = K \frac{(e)(e)}{d^2} + K \frac{(4e)(e)}{(2d)^2} - K \frac{(2e)(e)}{d^2} = 0$$

۱۳. دو بار نقطه‌ای  $q_1 = 30nC$  و  $q_2 = -40nC$  روی محور  $x$  به ترتیب در مبدأ و در نقطه  $x = 72cm$  ثابت شده‌اند. ذره‌ای با بار الکتریکی  $q = 42\mu C$  در مکان  $x = 28cm$  از حالت سکون رها می‌شود. اگر بزرگی شتاب اولیه‌ی این ذره برابر با  $100 Km/s^2$  باشد جرم آن چقدر است؟

حل: بزرگی نیرویی که بر بار  $q$  وارد می‌شود، برآیند نیروهایی است که از طرف بارهای  $q_1$  و  $q_2$  به آن وارد می‌شود. لذا:

$$F = K \frac{q_1 q}{r_1^2} + K \frac{q_2 q}{r_2^2} = Kq \left[ \frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} \right] =$$

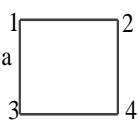
$$= (8.85 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})(42 \times 10^{-6} C) \left[ \frac{30 \times 10^{-9} C}{(0.28m)^2} + \frac{40 \times 10^{-9} C}{(0.44m)^2} \right] = 0.22N$$

این نیرو به بار الکتریکی  $q$  که جرم آن را باید محاسبه کنیم، شتاب  $100 Km/s^2 = 100 \times 10^3 m/s^2$  می‌دهد،

$$m = \frac{F}{a} = \frac{0.22N}{100 \times 10^3 m/s^2} = 2.2 \times 10^{-6} Kg$$

پس داریم:

۱۴. در شکل (۷-۲) چهار ذره در رأس‌های مربعی به ضلع  $a$  قرار دارند. این بارها دارای مقادیر

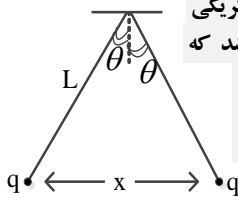


$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = Q$  می‌باشند. اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذره‌های شماره ۱ و ۴ برابر صفر باشد، نسبت  $Q/q$  را محاسبه کنید.

حل: نیروهایی که بر ذره  $q_1$  وارد می‌شوند عبارتست از:  $F_{12}$ ،  $F_{13}$  و  $F_{14}$  و چون برآیند این نیروها صفر می‌باشد پس می‌بایست که  $F_{12} = F_{14} \sin 45^\circ$  باشد. بنابراین داریم: شکل ۷-۲. مثال ۱۴

$$K \frac{q_1 q_2}{a^2} = K \frac{q_1 q_4}{(\sqrt{2}a)^2} (\sqrt{2}/2) \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

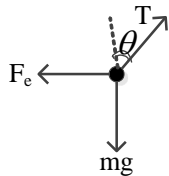
۱۵. در شکل (۸-۲) دو گوی رسانای کوچک با جرم‌های یکسان  $m$  و بار الکتریکی یکسان  $q$  از نخ‌هایی به طول  $L$  آویخته شده‌اند. اگر زاویه  $\theta$  به حدی کوچک باشد که



بتوان از تقریب  $\tan \theta \approx \sin \theta$  استفاده نمود نشان دهید که:  $x = \left( \frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{\frac{1}{3}}$

حل: اگر نیروی گرانشی وارد بر گوی را با  $mg$  در نظر بگیریم و نیروی

الکتروستاتیکی وارد بر گوی را  $F_e$  بنامیم آنگاه سه نیروی وارد شده بر هر گوی به صورت زیر خواهند بود:



$$\begin{cases} T \cos \theta - mg = 0 \\ T \sin \theta - F_e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cos \theta = mg \\ T \sin \theta = K \frac{q^2}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x^2} \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mg x^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mg x^2}$$

حال اگر این دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم:

از سویی دیگر، چون  $\theta$  خیلی کوچک می‌باشد، می‌توان از تقریب  $\tan \theta \approx \sin \theta$  استفاده نمود. بنابراین:

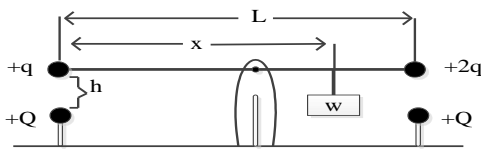
$$\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x/2}{L} = \frac{x}{2L}$$

پس می توان گفت که:  $\frac{x}{2L} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mgx^2}$  که با ساده سازی داریم:  $x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$

۱۶. در شکل (۲-۹) یک میله ی بدون جرم عایق بندی شده و به طول  $L$  نشان داده شده است که مرکز آن روی محور قرار دارد و با وزنه  $W$  به فاصله  $x$  از انتهای قسمت چپ در حال تعادل است. به دو انتهای چپ و راست میله به ترتیب بارهای الکتریکی مثبت  $q$  و  $2q$  وصل شده اند که در فاصله  $h$  از بار مثبت  $Q$  قرار دارند.

الف) فاصله  $x$  را محاسبه نمایید. ب) مقدار  $h$  چقدر باشد تا میله در حال تعادل هیچ نیروی قائمی را

احساس نکند.



حل: الف) اگر نیروی دافعه از سوی بار  $Q$

به بارهای  $q$  و  $2q$  را به ترتیب  $F_1$  و  $F_2$  بنامیم، شرط تعادل حول محور میله چنین می باشد:

شکل ۹-۲. مثال ۱۶

$$F_2\left(\frac{L}{2}\right) - W\left(x - \frac{L}{2}\right) - F_1\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$2K\frac{qQ}{h^2}\left(\frac{L}{2}\right) - W\left(x - \frac{L}{2}\right) - K\frac{qQ}{h^2}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow K\frac{qQL}{h^2} + \frac{WL}{2} - K\frac{qQL}{2h^2} = Wx$$

$$\text{و در نتیجه} \quad x = \frac{L}{2}\left(1 + K\frac{qQ}{h^2W}\right)$$

ب) شرط اینکه به میله، هیچ نیرویی وارد نشود و میله نیرویی را حس نکند این است که  $W = F_1 + F_2$

$$W = K\frac{qQ}{h^2} + 2K\frac{qQ}{h^2} = 3K\frac{qQ}{h^2} \Rightarrow h = \left(3K\frac{qQ}{h^2}\right)^{1/2} \quad \text{باشد:}$$

## ۶ - ۲. مسائل تکمیلی

۱. از سیمی شدت جریان الکتریکی  $0.8A$  عبور می کند. در مدت زمان یک دقیقه چند الکترون از مقطع سیم عبور می کند؟

۲. سه کره ی رسانای مشابه را به صورت: کره ی  $A$  با بار الکتریکی  $4Q$ ، کره ی  $B$  با بار الکتریکی  $6Q$  - و کره ی  $C$  را بدون بار الکتریکی در نظر بگیرید. اگر در آزمایش اول کره ی  $C$  را به کره ی  $A$  تماس داده و سپس کره ی  $C$  را به کره ی  $B$  تماس دهیم و نیز در آزمایش دوم ابتدا کره ی  $C$  را به کره ی  $B$  و سپس به کره ی  $A$  تماس دهیم، در صورتی که کره های  $A$  و  $B$  در جای خود ثابت باشند نیروی الکتروستاتیکی به وجود آمده در آزمایش اول با این نیرو در آزمایش دوم، چه نسبتی خواهد داشت؟

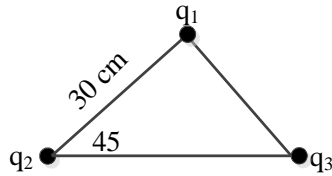
۳. دو بار نقطه ای از فاصله ی  $30cm$  با نیروی الکتروستاتیکی  $80N$  یک دیگر را دفع می کنند. اگر بار الکتریکی یکی از آنها برابر  $4\mu C$  باشد، بار الکتریکی دوم چقدر خواهد بود؟

۴. دو بار الکتریکی  $1.6 \times 10^{-19} C$  و  $3.2 \times 10^{-19} C$  را در فاصله  $2cm$  از همدیگر در نظر بگیرید. بزرگی و نوع نیروی بین این دو بار الکتریکی را محاسبه کنید.

۵. اگر فاصله‌ی دو بار الکتریکی را دو برابر و اندازه‌ی یکی از آنها را نیز دو برابر کنیم، نیروی الکتروستاتیکی که بارها در این حالت برهم وارد می‌کنند نسبت به حالت اول چند برابر می‌شود؟

۶. فرض کنید دو بار الکتریکی مثبت  $q$  که در یک فاصله خاص قرار دارند، نیروی  $F$  بر یکدیگر وارد می‌کنند. چند درصد از یکی از بارها را باید برداشت و به دیگری اضافه کرد تا در همان فاصله، نیروی بین آنها برابر  $(15/16)F$  گردد؟

۷. سه بار نقطه‌ای  $q_1 = q_2 = q_3 = 10\mu C$  در سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه همانند شکل (۱۰-۲) قرار دارند. نیروی وارد بر بار  $q_1$  از طرف بارهای دیگر چند نیوتن است؟



شکل ۱۰-۲. مسئله ۷

۸. دو ذره با بارهای الکتریکی یکسان در فاصله  $3.2 \times 10^{-3} m$  از هم، نگه داشته شده‌اند و سپس از حالت سکون رها می‌شوند. شتاب ذره اول  $7 m/s^2$  و شتاب ذره دوم  $9 m/s^2$  می‌باشد. اگر جرم ذره اول معادل  $6.3 \times 10^{-7} Kg$  باشد الف) جرم ذره دوم و ب) بزرگی بار هر ذره چقدر است؟